

The MYSTERY MAGNET e le correnti di Foucault

Corso di Fisica 2

Prof. G. Carboni

A.A. 2015-2016

1 Un elettromagnete per sostanze non ferrose

Qui mostreremo come sia possibile attrarre oggetti non ferrosi utilizzando un elettromagnete alimentato in corrente alternata. L'importante è che si tratti di oggetti conduttori.

Consideriamo un solenoide cilindrico di raggio a in cui si crea un campo magnetico

$$\begin{aligned} B_z(t) &= B_0 \sin(\omega t) \\ \omega &\approx 300 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

dove abbiamo supposto che la corrente alternata che circola nel solenoide abbia una frequenza di 50 Hz (quella della rete elettrica) e il solenoide orientato lungo l'asse z . Sulla faccia del solenoide $B_0 = \mu_0 n i / 2$.

Sulla faccia del solenoide mettiamo una rondella di rame di raggio medio $r = 5.5$ cm, $\Delta r = 1.0$ cm e $h = 2$ mm (vedi figura 1) centrata sull'asse. Supponiamo $r < a$ in modo da avere un campo abbastanza uniforme.



Figura 1 La rondella di rame.

Il campo magnetico variabile induce nella rondella un fem che crea una corrente circolante nella rondella:

$$\begin{aligned}
 i(t) &= -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\pi r^2 \omega}{R} B_0 \cos(\omega t) \\
 R &= \frac{2\pi r}{\sigma \Delta r h} \approx 2.86 \cdot 10^{-4} \Omega \\
 \Downarrow \\
 i(t) &= -\frac{1}{2} \sigma r \Delta r h \omega B_0 \cos(\omega t)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

dove R è la resistenza elettrica della rondella stessa e $\sigma = 6.0 \cdot 10^7$ S/m è la conducibilità del rame. Numericamente

$$i(t) = -9900 B_0 \cos(\omega t)$$

dove il segno $-$ indica che la corrente circola sempre in modo da opporsi alla variazione di B . Vediamo che la corrente può assumere valori assai elevati: un campo di 10 gauss (10^{-3} T) induce una corrente di 9.9 A di picco.

Per vedere se questa corrente altera sensibilmente il campo magnetico calcoliamo il controcampo da essa creato utilizzando la formula per il campo magnetico al centro di una spira piana circolare $B' = \mu_0 i / (2r)$ ottenendo

$$\begin{aligned}
 B'(t) &= -\frac{1}{4} \mu_0 \sigma \Delta r h \omega B_0 \cos(\omega t) = -0.113 B_0 \cos(\omega t) \\
 |B'(t)| &\ll |B(t)|
 \end{aligned}$$

possiamo quindi trascurare questa correzione al campo B .

La corrente crea nella rondella un momento magnetico $m = \pi r^2 i$. Questo momento magnetico è orientato in direzione opposta alla variazione del campo magnetico del solenoide, pertanto la rondella è soggetta a una forza

$$F_z = \pi r^2 i \frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{2}$$

Il valore di $\partial B_z / \partial z$ sull'asse del solenoide si trova sul libro all'esempio 9.4 e vale $-B_z / a$. Pertanto

$$F_z = -\frac{\pi \sigma r^3 \Delta r h \omega B_0^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)}{2a} = -\frac{\pi \sigma r^3 \Delta r h \omega B_0^2 \sin(2\omega t)}{4a}$$

La forza quindi oscilla rapidamente (frequenza 100 Hz) e ha media nulla ma causa delle vibrazioni della rondella. Per ignorarle supporremo la rondella solidale con l'estremità del solenoide. Confrontando la corrente (proporzionale a $\cos(\omega t)$) con il campo (proporzionale a $\sin(\omega t)$) si vede che il momento magnetico e il campo B_z sono alternativamente concordi e discordi. L'ampiezza della forza vale numericamente

$$F_0 = 46.6 \frac{B_0^2}{a}$$

Adesso poniamo sopra questa rondella una seconda rondella uguale alla prima, ma di altezza h' . Sia d la distanza fra le due rondelle. Se $d, h, h' \ll a$ e se trascuriamo l'effetto della

correzione B' la corrente indotta sarà equiversa alla corrente indotta nella prima rondella e con questa nel rapporto h'/h . Considerando le due rondelle come due fili rettilinei (!) paralleli di lunghezza $2\pi r$ distanti d fra i due si ha quindi una forza attrattiva data da

$$(3) \quad F_{12} = \frac{\mu_0 i i' 2\pi r}{2\pi d} = \frac{\mu_0 \sigma^2 r^3 \Delta r^2 h h' \omega^2 B_0^2 \cos^2(\omega t)}{4d} = 3.3 \frac{B_0^2}{d}$$

dove abbiamo considerato $h' = h$ a sostituito $\cos^2$ con la sua media $1/2$.

Confrontando questa forza con F_0 vediamo che la forza attrattiva domina se, come supposto, $d \ll a$. Il calcolo della massa della rondella di rame ci dà il valore $m = 50$ g. La forza peso vale quindi $mg = 0.49$ N. Per poter sollevare la rondella, supponendo $d = 2$ mm, occorre un campo magnetico

$$(4) \quad B_0 = \sqrt{mgd/3.3} = 1.72 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$

Un problema è tuttavia costituito dal termine (2) che richiederebbe, per essere trascurato rispetto alla forza attrattiva (3), un solenoide di raggio molto grande rispetto alle dimensioni della rondella. La soluzione è di utilizzare, al posto di un solo solenoide, una coppia di bobine di Helmholtz. Come si sa queste sono costruite proprio per avere un campo altamente uniforme così da poter trascurare $\partial B/\partial z$ ($\partial B/\partial z = 0$ al centro del sistema).

Nel modello costruito in laboratorio le bobine di Helmholtz producono un campo il cui valore al centro vale $7.3 \cdot 10^{-3} I$ T (dove I è la corrente in ampere).

Per amplificare l'effetto abbiamo utilizzato tre rondelle in rame saldate fra loro in modo da avere una altezza $h' = 6$ mm. La rondella da sollevare è stata realizzata in alluminio per ridurre il peso ($m = 18$ g). La conducibilità dell'alluminio è $\sigma_{Al} = 3.7 \cdot 10^7$. Sostituendo questi valori nella formula (3) otteniamo

$$(5) \quad F'_{12} = 6.5 \frac{B_0^2}{d}$$

Considerando la massa di 18 g otteniamo un sollevamento a un'altezza $d = 2$ mm per un campo $B_0 = 7.4 \cdot 10^{-3}$ T.

2 Le correnti di Foucault

Se tocchiamo le rondelle durante il funzionamento del magnete vediamo che si scaldano notevolmente. Il motivo è la dissipazione per effetto Joule delle correnti indotte nelle spire. Queste correnti prendono il nome di correnti di Foucault e sono la principale causa delle perdite di energia negli apparecchi che usano la corrente alternata di forte intensità per produrre campi magnetici (trasformatori, motori).

In un corpo a simmetria cilindrica con l'asse parallelo al campo magnetico le correnti hanno andamento circolare. Nel caso della rondella qui considerata la potenza dissipata $P = R i^2$ vale

$$(6) \quad P = \frac{\pi \sigma r^3 \Delta r h \omega^2 B_0^2 \cos^2(\omega t)}{2} = 1.06 \cdot 10^4 B_0^2$$

dove al solito abbiamo sostituito $\cos^2$ con la sua media $1/2$. Per il campo dato dalla formula (4) la potenza vale ben 4.15 W.

Le correnti di Foucault vengono sfruttate comunemente nelle piastre di cottura a induzione che funzionano sul principio del nostro magnete misterioso. Il fornello è costituito da spire percorse da corrente alternata e le correnti vengono indotte nel fondo delle pentole e padelle, che devono ovviamente essere fatte di buoni conduttori (rame, alluminio). Per aumentare le correnti indotte i fornelli funzionano con frequenze dell'ordine di 20-100 kHz. A 50 kHz la potenza dissipata nella nostra rondella andrebbe moltiplicata per 10^6 rispetto al valore calcolato prima (dipendenza da ω^2) ottenendo valori di centinaia di watt per campi modesti.

Le correnti di Foucault sono anche utilizzate nel forno a microonde. In tal caso le correnti sono indotte direttamente nel cibo da cuocere per il quale tipicamente la conducibilità ha valori dell'ordine di $\sigma \approx 1$ S/m. Rispetto al rame quindi siamo quasi 8 ordini di grandezza meno conduttivi. Per compensare la ridotta conducibilità la frequenza del campo magnetico viene ancora più innalzata rispetto al fornello a induzione. Tipicamente si usano frequenze sopra 2000 MHz, frequenze appunto nello spettro delle microonde radio. Nel caso del forno a microonde, più che di campo magnetico, è più appropriato parlare di un'onda elettromagnetica che contiene sia un campo elettrico che un campo magnetico.