

Sfere ed ellissoidi dielettrici hanno la peculiarità che **E**, **P** e **D** sono uniformi all'interno e fra loro paralleli

Esempi

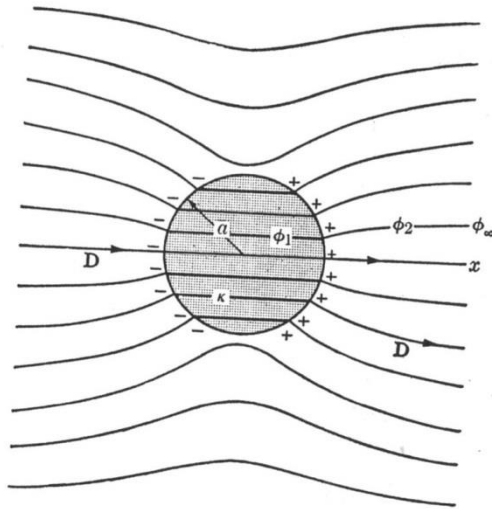
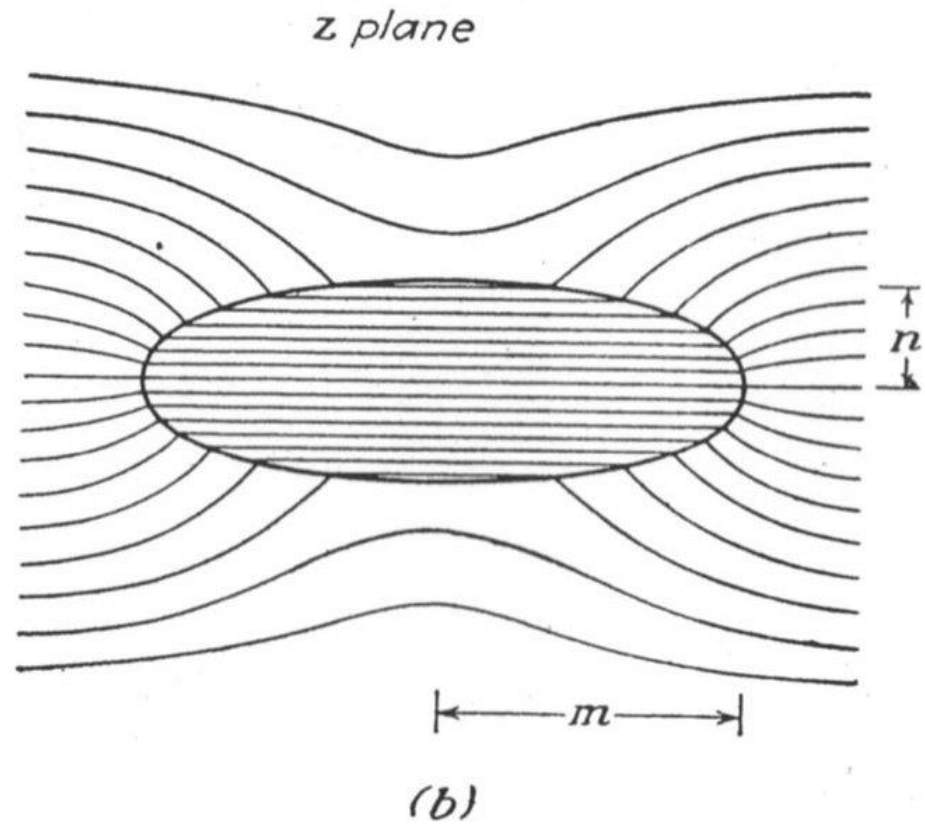
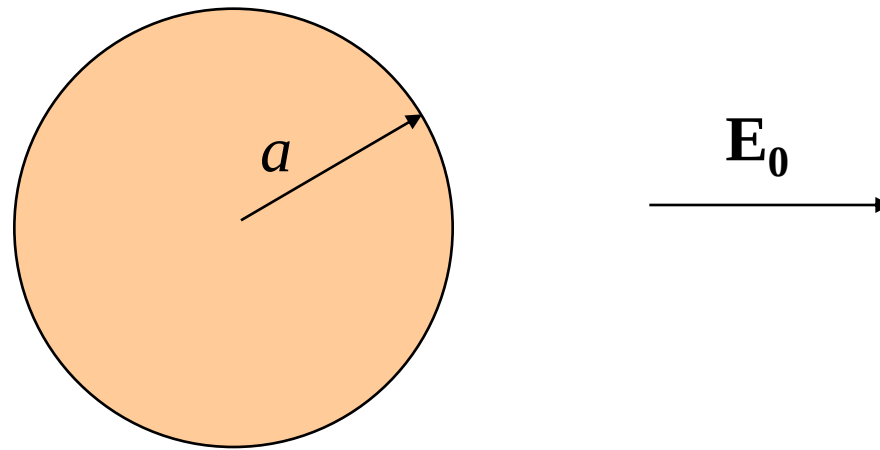


FIG. 5-3. Dielectric sphere in a uniform field.



Calcolo del campo all'interno di una sfera dielettrica immersa in un campo elettrico uniforme $\mathbf{E}_0$



Equazione di Laplace per il potenziale

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

Il problema ha simmetria azimutale attorno alla direzione del campo esterno (che prendiamo lungo l'asse z). Possiamo quindi limitarci a cercare soluzioni che non dipendono da φ .

Il problema è simile a quello della sfera conduttrice con una differenza sulle condizioni al contorno

- per il conduttore $V=\text{costante}$ sulla superficie della sfera
- per il dielettrico si devono soddisfare le condizioni al contorno per $\mathbf{E}$

Cerchiamo la soluzione sotto la forma

$$V(r, \theta) = \frac{U(r)}{r} P(\theta)$$

$$P \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{U}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = 0$$

Dividiamo per UP

$$\frac{r^2}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = 0$$

Dato che il termine a sinistra è solo funzione di r mentre quello di destra è solo funzione di θ entrambi devono essere uguali a delle costanti $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

$$\frac{r^2}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} = \lambda_1$$

$$\frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = \lambda_2 = -\lambda_1$$

Questa equazione differenziale ha soluzioni regolari e periodiche se la costante

$\lambda_1 = n(n+1)$ dove n è un intero positivo o nullo.

In tal caso le soluzioni sono i polinomi di **Legendre**
 $P_n(\cos \theta)$

$$P_0(\cos \theta) = 1$$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1)$$

.....

Verificare per $n=0$ (banale) e per $n=1$ (facile)

I polinomi di Legendre sono fra loro ortogonali

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0 \quad \text{per } n \neq m$$
$$\int_{-1}^1 P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$$

ed è quindi possibile scrivere qualunque funzione di θ sotto forma di serie di P_n

Per l'equazione radiale abbiamo quindi

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{n(n+1)}{r^2} U = 0$$

Poniamo $U = A r^\alpha$. Troviamo facilmente per sostituzione $\alpha(\alpha-1) = n(n+1)$ che ha due soluzioni per α :

$$\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} - \frac{n(n+1)}{r^2} r^\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(\alpha-1) = n(n+1)$$

$$\Rightarrow \alpha = n+1 \quad \text{oppure} \quad \alpha = -n$$

$$\frac{d^2U}{dr^2} - \frac{n(n+1)}{r^2}U = 0$$

Le soluzioni per V sono quindi

- a) $V = A r^n$ *regolare nell'origine*
- b) $V = B r^{-n-1}$ *regolare all'infinito*

La soluzione più generale per il potenziale elettrostatico si scrive quindi sotto forma di serie

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) P_n(\cos \theta)$$

in cui A e B vanno scelti in base alle condizioni al contorno.

Esempio: campo elettrico uniforme in direzione z.
Resta solo il termine n=1 con $A_1 = -E_0$ e tutti i B=0

Infatti

$$V = -E_0 r P_1(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta = -E_0 z$$

Sfera dielettrica

Condizioni al contorno per $r = a$. Sulla superficie di separazione la continuità dev'essere soddisfatta per

- la componente normale di $\mathbf{D}$ (divergenza = 0)
- la componente tangenziale di $\mathbf{E}$ (rotore = 0)

$$D_n^{(int)} = D_n^{(ext)}$$

$$E_t^{(int)} = E_t^{(ext)}$$

Le soluzioni saranno

campo esterno



per $r \leq a$
$$V_1 = \sum_n A_n r^n P_n(\cos \theta)$$

per $r > a$
$$V_2 = \sum_n (B_n r^n + C_n r^{-(n+1)}) P_n(\cos \theta) - E_0 r P_1(\cos \theta)$$

Con le condizioni seguenti per $r = a$

1) radiale $\Rightarrow \varepsilon \frac{\partial V}{\partial r}$ continua

2) tangenziale $\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$ continua

Dev'essere $B_n = 0$ per $n > 1$ altrimenti il potenziale diverge come r^2 all'infinito. Inoltre anche $B_1 = 0$

Utilizzando la due condizioni per $r = a$ troviamo per $n > 1$

$$\varepsilon_1 n A_n a^n = -\varepsilon_2 (n+1) C_n a^{-(n+1)}$$

$$A_n a^n = C_n a^{-(n+1)}$$

$\therefore$

$$\varepsilon_1 n = -\varepsilon_2 (n+1) \quad \Leftarrow \quad \text{impossibile}$$

per tanto per $n > 1$

$$A_n = B_n = C_n \equiv 0$$

Per $n=1$ otteniamo infine

$$A_1 = -E_0 + C_1 a^{-3}$$

$$\varepsilon_1 A_1 = -\varepsilon_2 E_0 - 2\varepsilon_2 C_1 a^{-3}$$

Moltiplicando la prima per $2\varepsilon_2$ e sommando

$$2\varepsilon_2 A_1 = -2\varepsilon_2 E_0 + 2\varepsilon_2 C_1 a^{-3}$$

$$\varepsilon_1 A_1 = -\varepsilon_2 E_0 - 2\varepsilon_2 C_1 a^{-3}$$

$\therefore$

$$(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)A_1 = -3\varepsilon_2 E_0$$

$$E_1 = \frac{3E_0}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + 2}$$

Se all'esterno siamo nel vuoto o in aria $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$
pertanto $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = \varepsilon_r$ è la costante dielettrica relativa
del dielettrico

$$E_1 = \frac{3E_0}{\varepsilon_r + 2}$$

Il campo elettrico è quindi uniforme e diretto
nella direzione di z come il campo esterno all'infinito.
Per il termine in C_1 abbiamo

$$C_1 = a^3 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} E_0$$

Il termine in C_1 corrisponde a un potenziale di dipolo

$$V_{\text{dip}} = C_1 \frac{\cos \theta}{r^2}$$

con un momento

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 C_1 = 4\pi\epsilon_0 \cdot a^3 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0$$

Verifichiamo per consistenza che integrando il vettore **P** sul volume della sfera otteniamo **p**.

La polarizzazione è data da

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E}_1 = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0$$

Moltiplicando il vettore **P** (costante!)
per il volume della sfera otteniamo
proprio **p**

$$\vec{p} = \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right) 3\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0 = 4\pi \epsilon_0 a^3 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0$$

Se avessimo assunto a priori $\mathbf{P} = \text{costante}$ allora la densità di cariche di polarizzazione sulla superficie della sfera sarebbe stata $\sigma_p = P \cos \theta$. Utilizzando il risultato ottenuto per la sfera conduttrice sappiamo che questa distribuzione di carica crea un campo uniforme al suo interno

$$\vec{E}_P = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

Il campo nel dielettrico è quindi la sovrapposizione del campo esterno e di questo campo

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

e usando

$$\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E}_1$$

otteniamo di nuovo

$$\vec{E}_1 = \frac{3\vec{E}_0}{\varepsilon_r + 2}$$

$$\vec{P} = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \vec{E}_0$$

Possiamo vedere facilmente che se $\epsilon_r \gg 1$ il campo elettrico è quasi normale alla superficie della sfera, come se questa fosse un conduttore. Per $r \rightarrow a$ dall'interno della sfera

$$E_{\perp} = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -A_1 \cos \vartheta$$

$$E_{\parallel} = -\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = A_1 \sin \theta$$

Immediatamente all'esterno della sfera invece

$$E_{\perp} = -\epsilon_r A_1 \cos \vartheta$$

$$E_{\parallel} = A_1 \sin \theta$$

