

Appunti di Relatività Ristretta

Corso di Fisica 2

Prof. G. Carboni

A.A. 2014-2015

1 Introduzione

Postulati della relatività ristretta (Einstein, 1905)

1. Le leggi dell'elettrodinamica, in particolare la costanza della velocità della luce nel vuoto, e della meccanica sono le stesse in tutti i riferimenti inerziali.
2. E' impossibile realizzare o concepire un esperimento che riveli lo stato di moto assoluto ovvero determinare un riferimento privilegiato per un qualsiasi fenomeno fisico
3. Nessun segnale o interazione può propagarsi a velocità $> c$.

Quando Einstein pose i suoi postulati si pensava che le forze si riducessero alla gravitazione e alle forze e.m. Oggi i dati sperimentali confermano che tutte le interazioni (gravitazionali, e.m., forti e deboli) soddisfano questi postulati del 1905.

2 L'evento

In relatività è cruciale la definizione di

evento.

Un evento è qualsiasi cosa che accade in un luogo definito ad un tempo definito. Un evento è quindi caratterizzato dalla quaterna di numeri (t, x, y, z) in un riferimento Σ .

Un evento può essere pensato come un punto in uno spazio a 4 dimensioni (spazio-tempo, spazio di Minkowski) di coordinate (t, x, y, z) o (ct, x, y, z) o (x_0, x_1, x_2, x_3) . In un altro sistema di riferimento Σ' che si muove a velocità $\vec{v}$ rispetto al primo l'evento sarà (t', x', y', z') . Ci siamo riservati quindi la possibilità che il tempo nei due sistemi possa essere diverso, e non assoluto come il tempo galileiano.

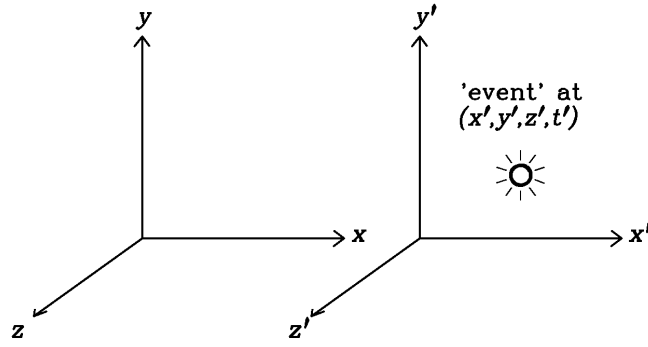


Figura 1 Due sistemi di riferimento in moto relativo lungo l'asse x .

3 Trasformazioni di Lorentz

Consideriamo due riferimenti Σ e Σ' . Il secondo trasla lungo l'asse x con velocità u . Nei due riferimenti ci sono due orologi che vengono sincronizzati nel momento che le due origini spaziali coincidono. L'evento di incrocio ha quindi $t = t' = x = x' = 0$.

Nell'ipotesi galileiana il tempo è assoluto e quindi se gli orologi sono sincronizzati avremo $t = t'$ a tutti gli istanti successivi. In questa ipotesi sappiamo che, se io osservo un evento (x, t) in Σ un osservatore in Σ' lo osserva come

$$\begin{aligned}x' &= x - ut \\t' &= t\end{aligned}$$

e ovviamente

$$\begin{aligned}(1) \quad x &= x' + ut \\(2) \quad t &= t'\end{aligned}$$

Ma se la luce deve propagarsi alla stessa velocità c nei due riferimenti allora forse Σ e Σ' non misurano lunghezze e tempi nella stessa maniera. L'osservatore in Σ prova quindi a inserire un fattore correttivo

$$(3) \quad x' = \gamma(x - ut)$$

Questo fattore γ in genere dipende da u (solo dal suo modulo altrimenti lo spazio non sarebbe isotropo): $\gamma = \gamma(u)$. Ma l'altro osservatore in Σ' ha il pieno diritto di scrivere la medesima formula perché per lui è il primo osservatore che misura in modo differente spazi e tempi:

$$(4) \quad x = \gamma(x' + ut')$$

Questo perché, per il principio di relatività, i due sistemi sono in tutto equivalenti. Il cambiamento di segno di fronte a u ovviamente viene dal fatto che le velocità si invertono passando da un sistema all'altro.

Consideriamo adesso come evento l'arrivo in un punto P di un raggio di luce emesso a $t = t' = 0$ nell'origine (che in quel momento coincide nei due sistemi):

$$\begin{aligned}(5) \quad x &= ct \\x' &= ct'\end{aligned}$$

Allora possiamo scrivere

$$(6) \quad xx' = \gamma^2(x - ut)(x' + ut') = \gamma^2(xx' + uxt' - ux't - u^2tt')$$

Sostituendo le (5) abbiamo

$$(7) \quad \begin{aligned} c^2tt' &= \gamma^2(c^2tt' - uctt' + uctt' - u^2tt') \\ c^2tt' &= \gamma^2(c^2 - u^2)tt' \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Dobbiamo scegliere la radice positiva dato che, per piccole velocità, dobbiamo ritrovare le trasformazioni di Galileo. $\gamma \geq 1$ e si riduce a 1 nel limite $u/c \rightarrow 0$. Questo si chiama il limite non relativistico. In un atomo di idrogeno l'elettrone ha $u/c \simeq 1/137$ ed è quindi essenzialmente non relativistico. Negli atomi pesanti la velocità degli elettroni interni è dell'ordine di $cZ/137$ e quindi gli effetti relativistici diventano apprezzabili.

Inserendo il risultato in (3) e (4) e con un po' di algebra otteniamo le **trasformazioni di Lorentz**:

$$(8) \quad x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Le equazioni possono essere risolte per ottenere (x, t) in funzione di (x', t') ma la maniera più semplice è di sostituire $u \rightarrow -u$ e scambiare $x \leftrightarrow x', t \leftrightarrow t'$:

$$(9) \quad x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad t = \frac{t' + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Spesso invece della radice a denominatore utilizzeremo γ e anche $\beta = \frac{u}{c} \leq 1$, per cui $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

Coordinate trasverse Le coordinate nel piano trasverso a $\vec{u}$, y e z , restano invariate. In effetti i due osservatori possono confrontare direttamente un regolo posto lungo l'asse y o z nell'istante dell'incrocio. Il procedimento di misura è identico per entrambi, la sola cosa che cambia è la direzione della velocità relativa, quindi entrambi devono trovare la stessa lunghezza. Pertanto per queste coordinate

$$(10) \quad y' = y \quad z' = z$$

insieme alle equazioni (8-9).

Analogia con le rotazioni Se al posto di t introduciamo la coordinata $x_0 = ct$ le trasformazioni di Lorentz prendono la forma

$$(11) \quad x' = \gamma x - \gamma \beta x_0 \quad x'_0 = \gamma x_0 - \gamma \beta x$$

Siccome $\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2 = 1$ possiamo riscriverle come

$$(12) \quad x' = x \cosh \psi - x_0 \sinh \psi \quad x'_0 = x_0 \cosh \psi - x \sinh \psi$$

con $\tanh \psi = \beta$, forma che richiama la rotazione di coordinate cartesiane nel piano

$$(13) \quad x' = y \cos \theta + y \sin \theta \quad y' = y \cos \theta - x \sin \theta$$

Mentre nella rotazione cartesiana $x^2 + y^2$ è un invariante nella rotazione di Lorentz l'invariante è $x_0^2 - x^2 = c^2 t^2 - x^2$.

4 Intervallo invariante

Consideriamo due eventi, 1 e 2.

$$(14) \quad \begin{array}{cc} (x_1, t_1) & (x'_1, t'_1) \\ (x_2, t_2) & (x'_2, t'_2) \end{array}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad \Delta t = t_2 - t_1$$

.....

Vediamo che anche le differenze delle coordinate spazio-temporali si trasformano secondo le trasformazioni di Lorentz:

$$(15) \quad \Delta x' = \frac{\Delta x - u \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u \Delta x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Questa relazione vale per differenze finite (a maggior ragione per differenze infinitesime). Allora

$$(16) \quad \begin{aligned} (c \Delta t')^2 - (\Delta x')^2 &= \gamma^2 [(c \Delta t - \beta \Delta x)^2 - (\Delta x - \beta c \Delta t)^2] = \\ &= \gamma^2 [(c \Delta t)^2 (1 - \beta^2) - (\Delta x)^2 (1 - \beta^2)] = \\ &= (c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \\ &= (\Delta s)^2 \end{aligned}$$

Δs è quindi un **invariante relativistico**. Notare che, a dispetto del quadrato, il segno di $(\Delta s)^2$ può essere qualunque. Essendo un invariante possiamo quindi calcolarlo nel sistema di riferimento che vogliamo e avrà sempre quel valore in tutti gli altri riferimenti. In particolare conserverà sempre lo stesso segno. Se ad esempio ho un orologio fisso nel mio riferimento Σ gli eventi 1 e 2 potrebbero essere il tic e tac, separati da un periodo τ_0 . La distanza spaziale Δx fra tic e tac è nulla perché l'orologio per ipotesi è a riposo. L'intervallo invariante o intervallo proprio fra questi due eventi è $c \tau_0$. Chiunque osserva il mio orologio da un sistema di riferimento in moto rispetto a me misurerà dei valori $\Delta x'$ e $\Delta t'$ diversi (in particolare $\Delta x' \neq 0$) ma l'intervallo proprio sarà sempre $c \tau_0$.

Considerando le 3 coordinate spaziali l'intervallo si scrive in generale come $(c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$. L'invarianza del segno dell'intervallo permette di classificare la separazione propria fra due eventi come

$$(17) \quad \begin{array}{ll} (\Delta s)^2 < 0 & \text{di genere spazio} \\ (\Delta s)^2 > 0 & \text{di genere tempo} \end{array}$$

mentre gli eventi con $(\Delta s)^2 = 0$ sono quelli che corrispondono alla propagazione di un raggio di luce e si dice che appartengono al **cono di luce** (in realtà un ipercono). Gli spostamenti di una particella fisica dotata di massa che si muove nello spazio-tempo (con $v < c$) sono sempre di genere tempo. La traiettoria nello spazio tempo è una linea che si chiama **linea d'universo** della particella ed è contenuta nel cono di luce perché (ogni spostamento è connesso causalmente col precedente).

Per risparmiare parentesi normalmente si abbrevia l'intervallo proprio infinitesimo come ds^2 , che dobbiamo intendere come $(ds)^2$ e non $d(s^2)$.

5 Trasformazione delle velocità

Consideriamo un proiettile in moto in un riferimento Σ e concentriamoci su due eventi vicini (nello spazio e nel tempo):

1. proiettile in x_1 al tempo t_1
2. proiettile in $x_1 + \Delta x$ al tempo $t_1 + \Delta t$

Nel riferimento Σ la velocità del proiettile lungo x vale $v = \Delta x / \Delta t$. Cerchiamo la velocità in un riferimento Σ' che si muove con velocità u lungo x .

$$(18) \quad \Delta x' = \frac{\Delta x - u \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u \Delta x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Dividiamo membro a membro

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - u \Delta t}{\Delta t - \frac{u \Delta x}{c^2}}$$

e poi dividiamo il numeratore e denominatore del secondo membro per Δt :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x'}{\Delta t'} &= \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - u}{1 - \frac{u}{c^2} \frac{\Delta x}{\Delta t}} \\ v' &= \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}} \end{aligned}$$

La velocità v' è evidentemente $\Delta x' / \Delta t'$ e analogamente $v = \Delta x / \Delta t$. La trasformazione inversa dà

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{uv'}{c^2}}$$

Facciamo notare che le equazioni rimangono valide se $\Delta x \rightarrow dx, \Delta t \rightarrow dt$, quindi sono corrette anche per le velocità istantanee.

Se invece di un proiettile abbiamo un laser che invia un fascio di luce si vede che se $v' = c$ anche $v = c$ e viceversa: la velocità della luce non cambia al cambiare di riferimento. Se $c \rightarrow \infty$ (basse velocità) le trasformazioni si riducono a quelle di Galileo.

Come esempio consideriamo un proiettile sparato con velocità $v' = \frac{3}{4}c$ in un razzo che vola a velocità $u = \frac{3}{4}c$. Allora la velocità del proiettile rispetto a un osservatore fisso al suolo è

$$v = \frac{\frac{3}{4}c + \frac{3}{4}c}{1 + (\frac{3}{4})^2} = c \frac{3/2}{1 + 9/16} = c \frac{24}{25}$$

6 La dilatazione dei tempi

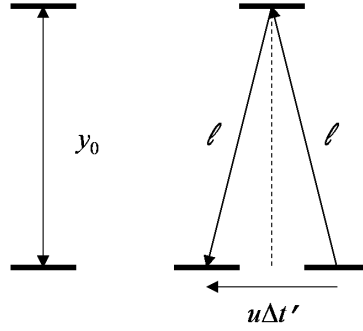


Figura 2 Dilatazione dei tempi. A sinistra un orologio consiste in due specchi paralleli con un raggio di luce che rimbalza dall'uno all'altro. A destra lo stesso orologio visto da un sistema che si muove verso destra a velocità u (e quindi l'orologio va verso sinistra).

Io porto con me un orologio, il cui intervallo di tempo fra il tic e il tac vale τ_0 nel mio riferimento. Il tic e il tac avvengono nello stesso punto spaziale (dove si trova l'orologio) per cui $\Delta x = 0$. Per un osservatore in moto rispetto a me l'intervallo di tempo fra tic e tac sarà

$$(19) \quad \Delta t' = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma \tau_0 \geq \tau_0$$

Il fenomeno è reciproco: ogni osservatore vede l'orologio dell'altro andare più lento. Questo è indipendente dal tipo di orologio: meccanico, elettronico, biologico, nucleare ecc. In particolare ciascuno vedrà l'altro osservatore invecchiare più lentamente di sé stesso (vedi dopo per il paradosso dei gemelli).

La cosa si spiega facilmente con il postulato delle costanza della velocità della luce. Considero un modello di orologio fatto da due specchi paralleli nel riferimento Σ , disposti a distanza y_0 lungo l'asse y ortogonale alla traslazione (vedi Figura 2). Il periodo di andata e ritorno della luce corrisponde a $\tau_0 = 2y_0/c$. Per un osservatore in Σ' la luce fa una traiettoria a zig-zag e fra un tic e un tac si propaga lungo i due lati di un triangolo isoscele. In un periodo $\Delta t'$ il punto di partenza A' e di arrivo B' della luce sono separati lungo x di $u\Delta t'$. Considerando il triangolo isoscele come l'insieme di due triangoli rettangoli e il fatto che la luce impiega un tempo $\Delta t' = 2\ell/c$ per andare da A' a B' possiamo scrivere

$$(20) \quad \ell^2 = \left(\frac{c\Delta t'}{2}\right)^2 = y_0^2 + \left(\frac{u\Delta t'}{2}\right)^2$$

Inserendo $y_0 = c\Delta t'/2$ otteniamo correttamente

$$(21) \quad \Delta t' = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma \tau_0$$

Il muone (μ) è una particella instabile di massa circa 210 volte la massa dell'elettrone. Il muone si disintegra dopo un tempo medio $\tau_0 = 2.2 \mu s$ misurato nel sistema di riferimento del muone. I muoni prodotti da raggi cosmici nella parte superiore dell'atmosfera hanno il tempo

di arrivare fino a terra, percorrendo una distanza di circa 20 km. Questo sarebbe impossibile se il muone visse per solo $2.2 \mu\text{s}$ anche viaggiando alla velocità della luce: infatti $c\tau_0 = 660$ metri. Ma i muoni prodotti sono relativistici e possono senza problemi avere $\gamma = 100$ o anche maggiore. Quindi per la dilatazione dei tempi la loro vita media in un sistema di riferimento fisso con la terra vale $\tau = \gamma\tau_0$ e possono percorrere tranquillamente una distanza $\ell = \gamma\tau_0 c = 66$ km.

7 La contrazione delle lunghezze

Supponiamo di avere un'asta di lunghezza L_0 a riposo in un riferimento Σ . Immaginiamo di voler misurare in Σ' , che si muove a velocità u rispetto a Σ , la stessa asta. Per fare questo occorre confrontare i due estremi con un regolo graduato al medesimo istante. E' indispensabile misurare i due estremi contemporaneamente perché l'asta si sta muovendo con velocità $-u$. Allora $\Delta x' = L'$ e $\Delta t' = 0$. Da $\Delta x = \gamma(\Delta x' + u\Delta t')$ otteniamo

$$(22) \quad L_0 = \Delta x = \gamma\Delta x' \implies L' = \frac{L_0}{\gamma}$$

Nell'esempio del muone che traversa l'atmosfera, nel sistema di riposo del muone l'atmosfera appare contratta di un fattore $1/\gamma$ per cui, se prendiamo $\gamma = 100$, i 20 km si riducono a 200 m che il muone può agevolmente superare in $2.2 \mu\text{s}$. Vediamo quindi che i due punti di vista (dilatazione dei tempi nel riferimento terrestre e contrazione delle lunghezze nel riferimento del μ) portano alla stessa identica conclusione.

8 Tempo e gravitazione

Un effetto importante, osservato sperimentalmente, è quello del rallentamento degli orologi in un campo gravitazionale. Si tratta di un effetto descritto, a rigore, dalla teoria della relatività generale, ma che può esser facilmente spiegato in base al cosiddetto **principio di equivalenza**. Il principio di equivalenza dice che la fisica osservata in un sistema accelerato è indistinguibile da quella che si osserva in presenza di un campo gravitazionale equivalente (ossia che provoca la stessa accelerazione). E' un postulato alla base della relatività generale. Vediamo come da questo principio si può determinare come un campo gravitazionale influenza la misura del tempo.

Consideriamo come in Figura 3 due orologi A e B in un laboratorio sulla Terra. L'orologio A si trova a un'altezza h sopra l'orologio B. In base al principio di equivalenza è la stessa cosa accelerare il laboratorio verso l'alto con accelerazione g in assenza della Terra. I due orologi vengono paragonati con un orologio C fermo in un riferimento inerziale Σ_0 , posto a un'altezza $H > h$. L'orologio A è il primo che raggiunge l'altezza H con una velocità che chiamiamo v_1 . L'intervallo di tempo misurato in Σ_0 , corrispondente al tempo proprio τ_0 dell'orologio A, sarà:

$$(23) \quad \Delta t_1 = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \approx \tau_0 \cdot \left(1 + \frac{v_1^2}{2c^2}\right)$$

dove abbiamo supposto $v_1^2/c^2 \ll 1$.

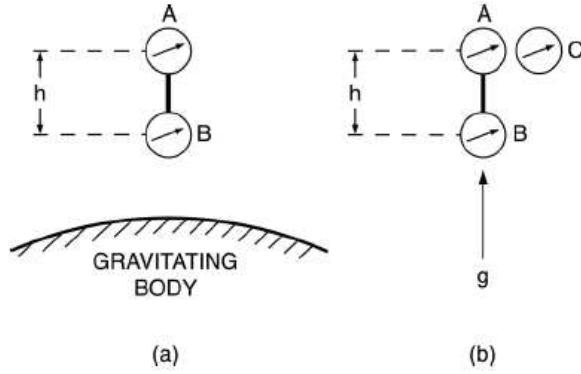


Figura 3 Misura del tempo sulla Terra e in un riferimento accelerato

L'orologio B raggiunge l'altezza H subito dopo, e la sua velocità sarà v_2 , per cui

$$(24) \quad \Delta t_2 = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} \approx \tau_0 \cdot \left(1 + \frac{v_2^2}{2c^2}\right)$$

Ma v_1 e v_2 non sono uguali perchè B, che arriva dopo, è stato accelerato più a lungo. Vale la relazione

$$v_2^2 - v_1^2 = 2gh$$

Pertanto sottraendo otteniamo

$$(25) \quad \Delta t_2 - \Delta t_1 = \tau_0 \frac{gh}{c^2} = -\tau_0 \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{c^2}$$

dove abbiamo chiamato Φ il potenziale gravitazionale. Se ne deduce che un orologio sulla superficie della Terra andrà più lentamente di un orologio lontano dalla Terra. L'effetto è perfettamente misurabile con i moderni orologi atomici ed è stato osservato sperimentalmente confrontando orologi sulla cima di un monte con orologi in pianura. E' un effetto importantissimo di cui tener conto per il GPS. In tal caso, considerando $\Phi_2 = -GM_T/R_T$ e $\Phi_1 \simeq 0$ (i satelliti GPS sono lontani dalla Terra) si trova che ogni giorno l'orologio sulla Terra ritarda di quasi $59 \mu s$, un ritardo che dev'essere corretto insieme a quello dovuto al fatto che il satellite GPS si muove a velocità V . L'effetto gravitazionale è quello dominante.

9 Simultaneità e causalità

La relatività della sequenza temporale di due eventi è implicita nella formula

$$(26) \quad \Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{u}{c^2} \Delta x \right)$$

Se $\Delta t > 0$, ossia l'evento 2 viene dopo l'evento 1, e $\Delta x \neq 0$, ossia i due eventi sono spazialmente separati, è a volte possibile trovare un riferimento in cui la sequenza temporale è invertita

($\Delta t' < 0$). Questo implica

$$(27) \quad \begin{aligned} \Delta t - \frac{u}{c^2} \Delta x &< 0 \\ \Delta t &< \frac{u}{c^2} \Delta x \\ 1 &< \frac{u}{c^2} \frac{\Delta x}{\Delta t} \end{aligned}$$

Se i due eventi sono causalmente connessi allora $\Delta x / \Delta t \leq c$ in quanto esiste un'interazione che deve propagarsi fra causa ed effetto con al massimo la velocità della luce. Ma l'inversione del rapporto causa-effetto è impossibile perchè richiederebbe

$$(28) \quad 1 < \frac{u}{c}$$

Se invece $\Delta x > c \Delta t$ allora i due eventi non sono causalmente correlati ed è possibile trovare infiniti riferimenti in cui $\Delta t' < 0$ e uno in cui $\Delta t' = 0$, in cui i due eventi sono simultanei. Il cono di luce $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$ separa le regioni dello spazio-tempo in cui futuro e passato sono concetti assoluti da quelle in cui sono concetti relativi.

10 Quadrivettori

La quaterna di coordinate di un punto materiale $X = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $x_0 = ct$ costituisce per definizione un **quadrivettore**. La definizione consiste nel fatto che si trasforma in un altro quadrivettore X' per una trasformazione di Lorentz.

Il modulo quadro di un quadrivettore è l'invariante che abbiamo già visto

$$(29) \quad X^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = x_0^2 - |\vec{r}|^2$$

e in base al segno si definiscono 4-vettori di genere tempo ($X^2 > 0$) e di genere spazio ($X^2 < 0$). Più in generale il prodotto scalare di due quadrivettori è anch'esso un invariante e si calcola come

$$(30) \quad X \cdot Y = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 = x_0 y_0 - \vec{x} \cdot \vec{y}$$

Vediamo come si può costruire un quadrivettore velocità partendo dallo spostamento infinitesimo $dX = (dx_0, d\vec{r})$, che è un 4-vettore.

In meccanica classica per ottenere il vettore velocità basta dividere il vettore spostamento infinitesimo per il tempo infinitesimo dt che è uno scalare

$$(31) \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

In meccanica relativistica l'intervallo dt non è uno scalare (ossia un invariante) e quindi dX/dt non è un 4-vettore. Essendo t una coordinata sarebbe un po' come se in meccanica classica volessimo fare un vettore dividendo $d\vec{r}/dy$.

Per ottenere un 4-vettore partendo dallo spostamento lo dividiamo per il tempo proprio della particella $d\tau = ds/c$ che è un invariante ben definito e rappresenta il tempo misurato da un orologio solidale con la particella stessa.

$$(32) \quad W = \frac{dX}{d\tau} = \left(\frac{dx_0}{d\tau}, \frac{dx_1}{d\tau}, \frac{dx_2}{d\tau}, \frac{dx_3}{d\tau} \right)$$

ma

$$(33) \quad \frac{df}{d\tau} = \frac{df}{dt} \frac{dt}{d\tau}$$

e utilizzando la relazione $dt = \gamma d\tau$

$$(34) \quad W = \gamma \left(\frac{dx_0}{dt}, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right) = \gamma(c, \vec{v})$$

La componente spaziale della 4-velocità W si riduce alla velocità galileiana nel classico ($\gamma \rightarrow 1$). Moltiplicando la 4-velocità per la massa m_0 della particella otteniamo il 4-impulso

$$(35) \quad P = \left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = m_0 \gamma (c, \vec{v})$$

Notiamo che la velocità della particella è data da

$$(36) \quad \frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{P}}{P_0} = c \frac{\vec{P}}{E}$$

La 4-velocità e il 4-impulso sono quadrivettori di genere tempo. L'invariante P^2 del 4-impulso vale

$$(37) \quad P^2 = m_0^2 c^2$$

L'interpretazione della componente spaziale di P è l'impulso classico, a cui si riduce per $v \ll c$. Per ottenere il significato fisico della componente $P_0 = m_0 c \gamma$ moltiplichiamola per c e sviluppiamo in serie per piccole velocità ottenendo:

$$(38) \quad cP_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots \right) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots$$

Quindi cP_0 corrisponde all'energia della particella. Questa contiene un termine costante $m_0 c^2$ che si interpreta come un'energia a riposo, associata alla massa m_0 , cui si somma un'energia cinetica. In meccanica relativistica la conservazione del quadrimpulso comprende quindi la conservazione dell'impulso spaziale e la conservazione dell'energia, includendo il termine di massa a riposo. Ne consegue la possibilità di creare e distruggere particelle purché sia rispettato il bilancio energetico. Esplicitando

$$(39) \quad P = \left(\frac{E}{c}, \vec{P} \right)$$

Utilizzando l'invariante del 4-impulso otteniamo infine la relazione relativistica fra energia e impulso

$$(40) \quad E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 |\vec{P}|^2$$

relazione che sostituisce la vecchia $E = p^2/(2m_0)$ e a cui si riduce nel limite non relativistico.

Particelle di massa nulla Esistono in natura particelle di massa nulla: il fotone e il neutrino. Per queste energia e impulso sono indistinguibili essendo $E = cP$ e la velocità è sempre c ($\beta = P/P_0 = (E/c)/(E/c) = 1$)

Equivalenza massa-energia Data l'equivalenza fra massa e energia è uso corrente misurare le masse delle particelle in MeV/c^2 o GeV/c^2 (o anche semplicemente in MeV e GeV). Questo è spesso molto comodo nei calcoli. Per esempio

$$(41) \quad T = \frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{1}{2}m_0c^2\frac{v^2}{c^2}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 2\frac{T [\text{MeV}]}{m_0c^2 [\text{MeV}]}$$

quindi un protone ($m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$) di energia cinetica $T = 20 \text{ MeV}$ ha $\beta = \sqrt{40/938} = 0.206$. L'approssimazione non relativistica è valida.

Esempio 1: disintegrazione di una particella in due fotoni Consideriamo la disintegrazione di una particella neutra π (massa $m_\pi = 135 \text{ MeV}/c^2$) in due di massa nulla. Nel sistema di riposo di π abbiamo

$$(42) \quad P'_\pi = (m_\pi c, 0, 0, 0)$$

Le due particelle di massa nulla hanno rispettivamente 4-impulsi

$$(43) \quad P'_1 = \left(\frac{E_1}{c}, p_{1x}, p_{1y}, 0\right) \quad P'_2 = \left(\frac{E_2}{c}, -p_{1x}, -p_{1y}, 0\right)$$

$$E'_1 + E'_2 = m_\pi c^2$$

Possiamo scrivere $p_{1x} = p \cos \theta$, $p_{1y} = p \sin \theta$. D'altronde $E_1 = E_2$ perchè il modulo di $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$ sono uguali. Quindi

$$(44) \quad P'_1 = \left(\frac{m_\pi c}{2}, \frac{m_\pi c}{2} \cos \theta, \frac{m_\pi c}{2} \sin \theta, 0\right) \quad P'_2 = \left(\frac{m_\pi c}{2}, -\frac{m_\pi c}{2} \cos \theta, -\frac{m_\pi c}{2} \sin \theta, 0\right)$$

Supponiamo adesso che il π si muova lungo l'asse x con una energia totale E_π . Dato che $E_\pi = \gamma m_\pi c^2$ possiamo calcolarci senza problemi il suo γ e β .

Per ottenere il 4-impulso di 1 e 2 applichiamo la trasformazione di Lorentz

$$P_{1x} = \gamma \left(P'_{1x} + \beta \frac{E'_1}{c} \right)$$

$$P_{1y} = P'_{1y}$$

$$P_{1z} = 0$$

$$\frac{E_1}{c} = \gamma \left(\frac{E'_1}{c} + \beta P'_{1x} \right)$$

da cui

$$\begin{aligned}
 P_{1x} &= \gamma \frac{m_\pi c}{2} (\cos \theta + \beta) \\
 P_{1y} &= \frac{m_\pi c}{2} \sin \theta \\
 P_{1z} &= 0 \\
 \frac{E_1}{c} &= \gamma \frac{m_\pi c}{2} (1 + \beta \cos \theta)
 \end{aligned}
 \tag{45}$$

analogamente troviamo P_2 (basta fare $\theta \rightarrow \theta + \pi$)

$$\begin{aligned}
 P_{2x} &= \gamma \frac{m_\pi c}{2} (-\cos \theta + \beta) \\
 P_{2y} &= -\frac{m_\pi c}{2} \sin \theta \\
 P_{2z} &= 0 \\
 \frac{E_2}{c} &= \gamma \frac{m_\pi c}{2} (1 - \beta \cos \theta)
 \end{aligned}
 \tag{46}$$

E' istruttivo verificare che $E_1 + E_2 = \gamma m_\pi c^2 = E_\pi$. Inoltre possiamo verificare direttamente che $(P_1 + P_2)^2 = m_\pi^2 c^2$:

$$(P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1 \cdot P_2 = 0 + 0 + 2P_1 \cdot P_2$$

perché $P_1^2 = P_2^2 = 0$ avendo 1 e 2 massa nulla. Utilizzando (45) e (46) abbiamo

$$\begin{aligned}
 2P_1 \cdot P_2 &= 2\left(\frac{m_\pi c}{2}\right)^2 (\gamma^2 (1 - \beta^2 \cos^2 \theta - \beta^2 + \cos^2 \theta) + \sin^2 \theta) = \\
 &= 2\left(\frac{m_\pi c}{2}\right)^2 (\gamma^2 (1 - \beta^2)(1 + \cos^2 \theta) + \sin^2 \theta) = \\
 &= 2\left(\frac{m_\pi c}{2}\right)^2 (1 + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \\
 &= m_\pi^2 c^2 \quad \text{c.d.d}
 \end{aligned}$$

Esempio 2: creazione di una nuova particella Supponiamo di voler creare una nuova particella di massa m_3 , nella collisione di una particella 1 (proiettile di massa m_1) con una particella 2 inizialmente a riposo (bersaglio di massa m_2). Si domanda qual è la minima energia E_1 perché ciò avvenga.

La minima energia necessaria si ha quando nel sistema del centro di massa di 1,2 e 3 queste sono tutte ferme. L'energia messa a disposizione dalla particella 1 infatti va tutta a costituire la massa m_3 senza contribuire all'energia cinetica. Il quadrivettore $Q' = Q'_1 + Q'_2 + Q'_3$ dello stato finale nel sistema del centro di massa sarà quindi

$$Q' = (m_1 c + m_2 c + m_3 c, 0, 0, 0)$$

L'invariante vale quindi $Q'^2 = (m_1 + m_2 + m_3)^2 c^2$. Ma essendo questo un invariante abbiamo $Q^2 = Q'^2$ dove Q è lo stesso 4-vettore calcolato nel riferimento in cui 2 è inizialmente a riposo

(prima della collisione). Per la conservazione del 4-impulso $Q = P_1 + P_2$ dove P_i sono i 4-impulsi iniziali di 1 e 2. Quindi

$$Q^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1 \cdot P_2 = m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2 \left(\frac{E_1 E_2}{c^2} - \vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 \right)$$

Ma 2 è ferma per cui $\vec{P}_2 = 0$ e $E_2 = m_2 c^2$. Quindi abbiamo

$$Q^2 = m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2E_1 m_2$$

e sostituendo il valore di Q^2 troviamo

$$(47) \quad E_1 = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_2} c^2$$

È interessante notare che, per creare masse $m_3 \gg m_1, m_2$ l'energia del proiettile cresce proporzionalmente al quadrato di m_3 . Ad esempio, si vede che per $m_3 = 10 \text{ GeV}/c^2$ utilizzando come proiettile e bersaglio dei protoni ($m_p = 0.938 \text{ GeV}/c^2$) occorre un proiettile di energia pari 69 GeV. Questo perché la maggior parte dell'energia è associata al moto del centro di massa e non è utilizzabile inelasticamente per creare nuove masse.

Per produrre masse elevate si utilizzano oggi acceleratori di particelle in cui la collisione avviene fra due fasci circolanti in senso opposto con uguale energia, in modo da utilizzare integralmente l'energia a disposizione per creare la nuova massa.

11 Dinamica del punto

La II legge di Newton in meccanica relativistica ha la forma

$$(48) \quad \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \vec{P} = m_0 \gamma \vec{v}$$

che è formalmente uguale alla legge di Newton non relativistica ma in cui compare una massa variabile con la velocità, $m_0 \gamma$. Notiamo che la (48) definisce la forza, e né $\vec{F}$ né $d\vec{P}/dt$ sono quadrivettori. La 4-accelerazione è infatti $dW/d\tau$. Comunque una volta data la forza la (48) va benissimo in un determinato riferimento. Volendo cambiare riferimento dovremo convertire tempi e spazi secondo le trasformazioni di Lorentz.

Mentre sarebbe piuttosto difficile scrivere l'espressione di una forza elastica valida relativisticamente, e la formulazione delle equazioni di moto nel campo gravitazionale richiede la relatività generale, se ci interessiamo solo alle forze di origine elettromagnetica allora è un fatto sperimentale che la forza elettromagnetica da inserire nella (48) è la forza di Lorentz:

$$(49) \quad \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Questa è esattamente la formula non relativistica che conosciamo. Gli effetti dinamici relativistici sono quindi legati al fattore γ in $\vec{P}$. La derivata di $\vec{P}$ infatti contiene due termini

$$(50) \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = m_0 \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} + m_0 \vec{v} \frac{d\gamma}{dt}$$

Il secondo termine corrisponde a quella che si chiama a volte la variazione di massa con la velocità. Diversamente dalla legge classica, la forza e l'accelerazione non sono parallele.

Calcoliamo il prodotto $\vec{v} \cdot \vec{F}$. Utilizzando la (48) abbiamo

$$(51) \quad \vec{v} \cdot \vec{F} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{P}}{dt} = c^2 \frac{\vec{P}}{E} \cdot \frac{d\vec{P}}{dt} = c^2 \frac{\vec{P} \cdot d\vec{P}}{E dt} = \frac{E dE}{E dt} = \frac{dE}{dt}$$

Abbiamo fatto uso della relazione (36) per scrivere la velocità mentre per ottenere $c^2 \vec{P} \cdot d\vec{P} = c^2 P dP = E dE$ ci siamo serviti della (40): $E^2 = m^2 c^4 + c^2 P^2$. Vediamo quindi che $\vec{v} \cdot \vec{F}$ rappresenta sempre la potenza e quindi $d\vec{r} \cdot \vec{F}$ il lavoro della forza.

Moto in un campo magnetico La forza di Lorentz in un campo puramente magnetico non fa lavoro e quindi l'energia di una particella relativistica rimane costante: $\gamma = \text{cost}$. Allora al secondo membro dell'equazione (50) sopravvive solo il primo termine. L'equazione di moto corrisponde formalmente a quella del moto non relativistico con la sostituzione $m \Rightarrow m_0 \gamma$. Ad esempio, in un campo magnetico uniforme, la frequenza di rotazione (frequenza di ciclotrone) $\omega = qB/m \Rightarrow qB/(m_0 \gamma)$ ossia la frequenza si abbassa al crescere dell'energia. Nel ciclotrone tradizionale quindi la tensione di accelerazione, che era sincrona con la rotazione, perde il "passo" con la particella. Per risolvere il problema nel **sincrociclotrone** la tensione di accelerazione viene mantenuta sincronizzata con la ω di rotazione man mano che questa diminuisce al crescere dell'energia. In un tipico sincrociclotrone γ può cambiare di un fattore due durante il ciclo di accelerazione portando protoni a riposo $\gamma = 1$ a protoni con energia totale di 2 GeV ($\gamma \sim 2$).

Moto rettilineo con forza costante In questo caso $dP/dt = F$ e $P = F t$. Per la velocità abbiamo

$$(52) \quad P = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = F t$$

$$v = c \frac{F t}{\sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2}}$$

Vediamo che al crescere di t $v \rightarrow c$. L'effetto relativistico si manifesta quando $F t$ diventa apprezzabile rispetto a $m_0 c$.

12 Quadripotenziali

Dalle equazioni di Maxwell si ottengono, come sappiamo, le equazioni d'onda per il potenziale scalare e il potenziale vettore

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

Se sostituiamo $(\epsilon_0)^{-1} = c^2 \mu_0$ nella prima e $\vec{j} = \rho \vec{v}$ nella seconda abbiamo

$$(53) \quad \begin{aligned} \nabla^2(V/c) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(V/c)}{\partial t^2} &= -\mu_0 \rho c \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \rho \vec{v} \end{aligned}$$

Quello che intendiamo dimostrare è che

$$(54) \quad (\rho c, \rho \vec{v}) \text{ e } \left(\frac{V}{c}, \vec{A} \right)$$

sono due 4-vettori. Cominciamo dal primo.

Sperimentalmente la carica è un invariante relativistico, in altri termini non dipende dalla velocità. Consideriamo una carica infinitesima nel suo sistema di riposo. Allora $dq = \rho_0 dV$ con $dV = dx dy dz$. Vista da un riferimento in moto con velocità u lungo l'asse x la lunghezza dx appare contratta di un fattore $1/\gamma = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$ per cui

$$(55) \quad dV' = dx' dy' dz' = \frac{dx}{\gamma} dy dz = \frac{dV}{\gamma}$$

quindi anche il volume appare contratto. Allora affinché la carica dq resti invariata dev'essere $\rho = \rho_0 \gamma$. Vediamo quindi che

$$(56) \quad (\rho c, \rho \vec{v}) = \rho_0 (\gamma c, \gamma \vec{v})$$

Ma $(\gamma c, \gamma \vec{v}) = W$ è la 4-velocità, quindi $(\rho c, \rho \vec{v}) = J$ è un 4-vettore (4-corrente).

Per dimostrare che i potenziali formano un 4-vettore dimostriamo che l'operatore D'Alembertiano nell'equazione d'onda è relativisticamente invariante. Con questo intendiamo che passando da un riferimento inerziale all'altro

$$(57) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

Considerando la velocità u lungo x e che quindi y e z non cambiano basterà dimostrare che

$$(58) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

Applichiamo l'operatore a una generica funzione $\varphi(x, t)$ con $x = x(x', t'), t = t(x', t')$. Calcoliamo la derivata $\partial \varphi / \partial x'$

$$(59) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x'}$$

Utilizzando le trasformazioni di Lorentz abbiamo

$$(60) \quad \begin{aligned} x &= \gamma(x' + ut') \Rightarrow \partial x / \partial x' = \gamma \\ t &= \gamma(t' + \frac{u}{c^2} x') \Rightarrow \partial t / \partial x' = \gamma \frac{u}{c^2} \end{aligned}$$

per cui possiamo scrivere

$$(61) \quad \frac{\partial}{\partial x'} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{u}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

Per calcolare la derivata seconda facciamo semplicemente il quadrato della formula (61):

$$(62) \quad \frac{\partial^2}{\partial x'^2} = \gamma^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{u^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2 \frac{u}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \right)$$

Procediamo analogamente per la derivata temporale

$$(63) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t'} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t'} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'}$$

utilizzando le trasformazioni di Lorentz abbiamo

$$(64) \quad \begin{aligned} x &= \gamma(x' + ut') \Rightarrow \partial x / \partial t' = \gamma u \\ t &= \gamma(t' + \frac{u}{c^2} x') \Rightarrow \partial t / \partial t' = \gamma \end{aligned}$$

quindi

$$(65) \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma \left(u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

e

$$(66) \quad \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \gamma^2 \left(u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2u \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \right)$$

Il D'Alembertiano nelle coordinate x', t' diventa quindi

$$(67) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \\ &= \gamma^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{u^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2 \frac{u}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \right) - \frac{\gamma^2}{c^2} \left(u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2u \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \right) = \\ &= \gamma^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \gamma^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \end{aligned}$$

e quindi c.d.d. l'equazione d'onda é invariante per trasformazioni di Lorentz. Ma se l'operatore D'Alembertiano é invariante e il secondo membro delle equazioni (53) é il 4-vettore J allora anche i potenziali a primo membro devono formare un 4-vettore:

$$(68) \quad \mathcal{A} = \left(\frac{V}{c}, \vec{A} \right)$$

Il 4-potenziale $\mathcal{A}$ quindi si trasforma secondo le trasformazioni di Lorentz

$$(69) \quad \begin{aligned} A_x &= \gamma \left(A'_x + \frac{u}{c^2} V' \right) \\ V &= \gamma (V' + u A'_x) \end{aligned}$$

Una volta ottenuto il 4-potenziale trasformato i campi elettrico e magnetico si ottengono in maniera standard. Dalle (69) si ottiene, ad esempio, che una carica puntiforme a riposo nel suo riferimento Σ' , genera un campo magnetico quando é osservata in un riferimento in cui si muove a velocità u . Infatti:

$$(70) \quad \begin{aligned} A_x(x, y, z, t) &= \gamma \frac{u}{c^2} V'(x', y', z', t') \\ V(x, y, z, t) &= \gamma V'(x', y', z', t') \end{aligned}$$

Questo corrisponde infatti al potenziale vettore di un elemento di corrente $Idx = dq u$ diretto lungo l'asse x che genera quindi un campo magnetico. Il fattore γ , assente nella derivazione classica, é una conseguenza della relatività. Il c^2 a denominatore, nascosto nella derivazione classica, é semplicemente un fattore $\epsilon_0 \mu_0$ a numeratore che moltiplicato per $1/(4\pi\epsilon_0)$ di V ci dá il $\mu_0/(4\pi)$ della legge di Laplace.

Per un filo infinito carico per cui

$$(71) \quad V' = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r' \quad E'_r = -\frac{\partial V}{\partial r'} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r'}$$

dove r' é la distanza dal filo, si ottiene in un riferimento in moto a velocità u lungo l'asse x il campo elettrico (radiale)

$$(72) \quad E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \gamma \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

dove abbiamo tenuto conto che $r = \sqrt{y^2 + z^2} = r'$ perché le coordinate trasversali restano invariate. Il campo elettrico é quindi amplificato del fattore γ , come c'era da aspettarsi perché la densità di carica λ appare cresciuta proprio di questo fattore.

Applicando la trasformazione ad $\mathcal{A}$ dobbiamo tener conto che se ci muoviamo lungo l'asse x a velocità u le cariche del filo appaiono muoversi a velocità $-u$. Dovremo quindi cambiare il segno nella prima delle (70), ottenendo

$$(73) \quad A_x = -\gamma \frac{u}{c^2} V' = \gamma \frac{u}{c^2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r'}.$$

Calcolando il rotore di $\mathbf{A}$ si ottiene infine un campo magnetico tangenziale come ci attendiamo da una corrente diretta verso le x negative:

$$(74) \quad B_\phi = (\nabla \times \mathbf{A})_\phi = -\frac{\partial A_x}{\partial r} = -\frac{u}{c^2} E_r.$$

Notare che la relazione tra $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ é identica a quella trovata in maniera classica. La sola differenza é che entrambi i campi sono amplificati del fattore γ a causa della contrazione di Lorentz che aumenta la densità di carica.