

FISICA GENERALE I

Docente: Prof. G. Carboni
giovanni.carboni@cern.ch

Esercitatore: Dott. R. Petrillo
roberto.petrillo@roma2.infn.it

Anno Accademico 2012 - 2013

FISICA GENERALE I

Docente: Prof. G. Carboni
giovanni.carboni@cern.ch

Esercitatore: Dott. R. Petrillo
roberto.petrillo@roma2.infn.it

Anno Accademico 2012 - 2013

Queste lezioni sono scaricabili in formato pdf
dalla pagina

<http://people.roma2.infn.it/carboni>

UTENTE: fis1_studenti
PW: disp_fis1

→ *Necessario Adobe Reader*

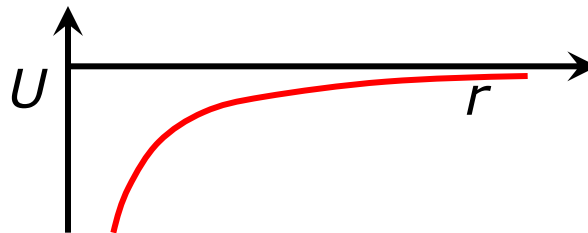


Si vuol fare cambiare orbita circolare a un satellite passando da un raggio r_1 a $r_2 > r_1$. Quanto lavoro deve fare il motore a razzo (forza esterna)?

Ricordiamoci che per un satellite c'è una relazione fra velocità v e R quindi fra energia cinetica e potenziale

$$v^2 = G \frac{M_T}{R} \quad T = \frac{1}{2} m v^2 = -\frac{1}{2} U$$

quindi cambiando R anche v deve cambiare. Passando a un'orbita più esterna $\Delta U > 0$ quindi il satellite deve rallentare



partiamo dal teorema delle forze vive che è sempre valido

$$\mathcal{L}(A, B) = \mathcal{L}_{\text{grav}}(A, B) + \mathcal{L}_{\text{motore}}(A, B) = \Delta T$$

$$\mathcal{L}_{\text{grav}}(A, B) = U(A) - U(B) = -\Delta U$$



$$\mathcal{L}_{\text{motore}}(A, B) = \Delta T + \Delta U = \Delta E$$

L'energia totale quindi si può scrivere

$$E = T + U = -\frac{1}{2}U + U = \frac{1}{2}U$$

$$E_2 = \frac{1}{2}U_2 > \frac{1}{2}U_1 = E_1$$

$$\mathcal{L}_{\text{motore}}(r_1, r_2) = E_2 - E_1 = \frac{1}{2}\Delta U > 0$$

Il lavoro sarà invece negativo passando a un'orbita più interna

Potenza

Lavoro compiuto/tempo



$$d\mathcal{L} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

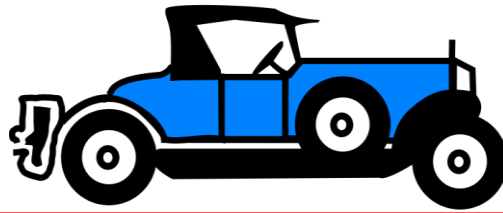
$$P = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Unità di misura: Watt = 1 J/s

Energia: 1 kWh = 1000 x 3600 = 3,6 10⁶ J

1 kWh ~ circa 0,1 litri di benzina costa in Italia 0,2 €





Che potenza ci vuole per mantenere l'auto a 100 km/h?

zero se non ci sono forze d'attrito !

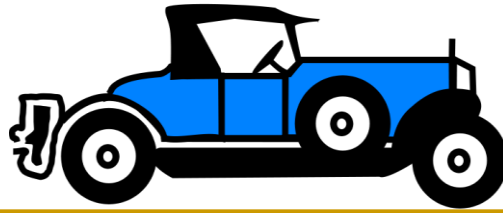
$$P = F_a v \text{ se c'è attrito} \quad F_a = \frac{1}{2} C_x \rho A v^2$$

$$A = 3 \text{ m}^2 \quad C_x = 0,3 \quad \rho = 1,3 \text{ kg/m}^3 \quad v = 27,8 \text{ m/s}$$

$$P = 12570 \text{ W} = 12,57 \text{ kW}$$



$$1 \text{ Cavallo (CV)} = 735 \text{ W}$$
$$P' = 17,1 \text{ CV}$$



Quanto si spende per fare 100 km?

$$100 \text{ km/h} \rightarrow T = 1 \text{ h}$$

$$E = P \times T = 12,57 \text{ kWh} \rightarrow \text{diciamo } 45 \text{ kWh causa perdite e efficienza del motore}$$

$$45 \text{ kWh} = 45 \times 10^3 \times 3600 = 162 \text{ MJ}$$

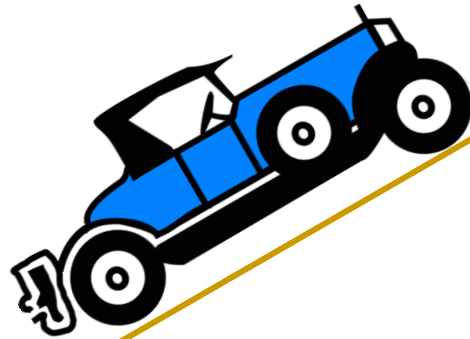
1 litro benzina (vedi dispense) 35 MJ

$$162 \text{ MJ} \rightarrow 4,6 \text{ litri} = 5,6 \text{ €}$$

Auto elettrica: migliore efficienza $\rightarrow E = 25 \text{ kWh}$

$$\text{Costo } 25 \text{ kWh} \times 0,2 \text{ €} = 5,0 \text{ €}$$

In salita?



Devo aggiungere $P' = mg \sin \alpha v$

$$m = 1000 \text{ kg} \quad \sin \alpha = 0,05$$

$$P' = 13,6 \text{ kW aggiuntivi}$$

Energia nel moto oscillatorio



Energia dell'oscillatore armonico

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

$$m\omega^2 = k$$

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = \omega A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$T = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \quad U = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Sostituendo nell'energia totale e usando $m\omega^2 = k$

$$E = \frac{1}{2} k A^2 [\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)]$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

costante !!

Energia dell'oscillatore armonico

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad U = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

possiamo concludere che ogni sistema la cui energia si può scrivere in questo modo è un oscillatore armonico con

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Come riconoscere a colpo un oscillatore armonico

L'equazione del moto ha la forma

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

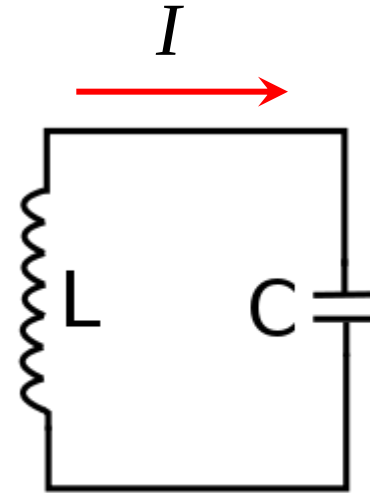
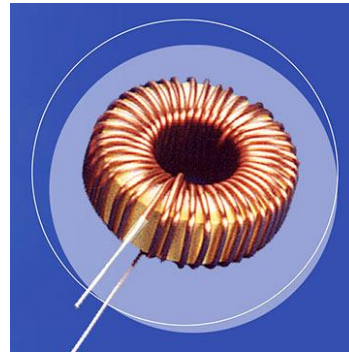
oppure l'energia ha la forma

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2$$



$$k > 0 \quad m > 0$$

Forme "canoniche"



$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{C} I = 0$$

Oscillatore armonico

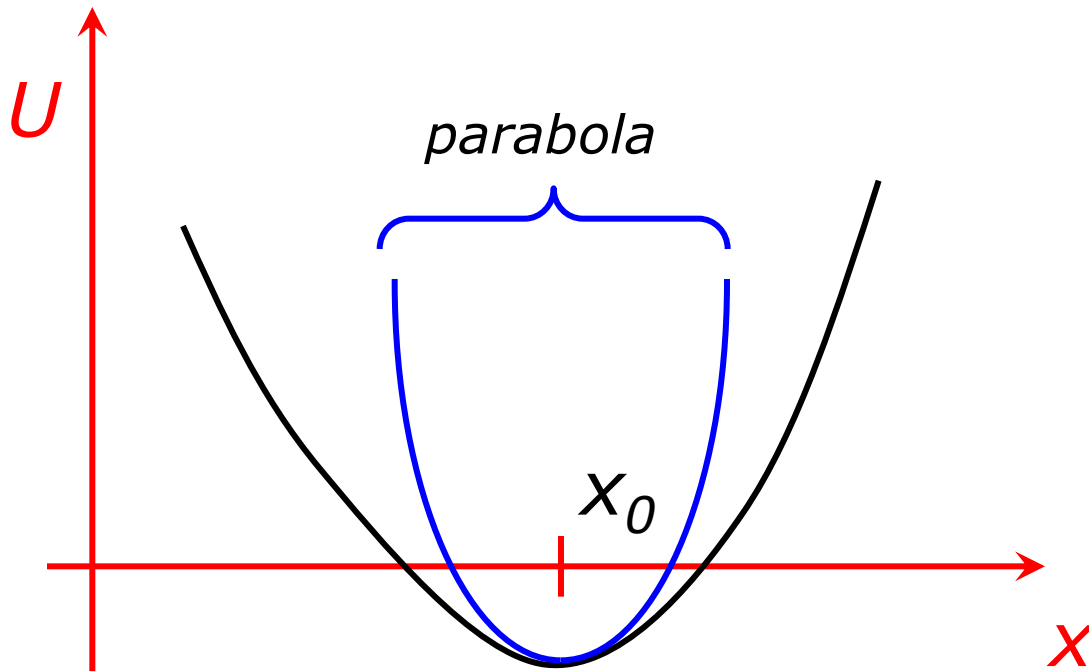
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Piccole oscillazioni intorno all'equilibrio

Qui si dimostra che un corpo spostato di poco dalla posizione di equilibrio stabile compie oscillazioni armoniche

Per fare questo mostreremo che la sua energia si può mettere nella forma “canonica”

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} k x^2$$



Si può (quasi) sempre approssimare U intorno a un minimo con una parabola

$$U(x) \approx U_0 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

La forma parabolica ci assicura che il punto è di equilibrio. Infatti

$$\frac{d}{dx} k(x - x_0)^2 = 2k(x - x_0)$$

e quindi la forza si annulla in $x = x_0$

Per avere la migliore approssimazione di U chiediamo poi che la derivata seconda del potenziale e della parabola coincidano in x_0 e quindi scegliamo k in modo che

$$k = \frac{d^2 U(x_0)}{dx^2}$$

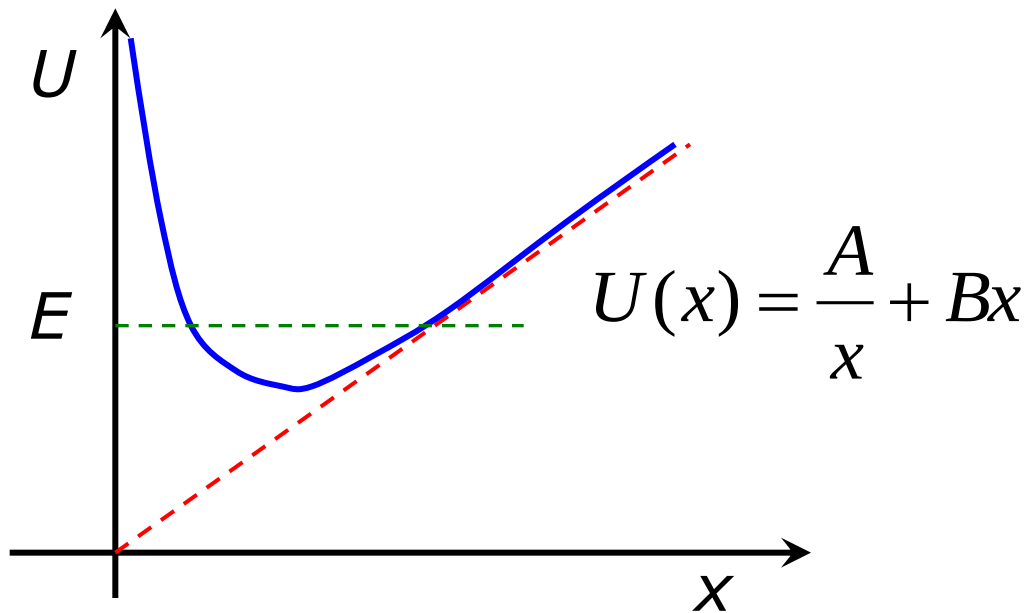
Quindi avendo messo U nella forma

$$U(x) \approx U_0 + \frac{1}{2} k(x - x_0)^2$$

e sostituendo $y = x - x_0$ l'energia totale diventa

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} k y^2$$

ossia quella dell'oscillatore armonico, C.D.D.



Troviamo la posizione di equilibrio: $U'(x) = 0$

$$-\frac{A}{x^2} + B = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \sqrt{\frac{A}{B}}$$

Per trovare la pulsazione delle piccole oscillazioni calcoliamo la derivata seconda di $U(x)$ in x_0

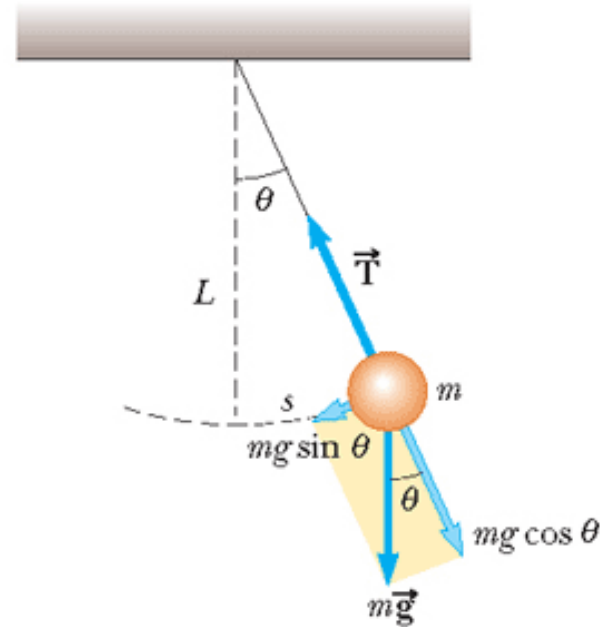
$$\frac{d^2U(x_0)}{dx^2} = \frac{2A}{x_0^3} = \Rightarrow \frac{d^2U(x_0)}{dx^2} = 2\sqrt{\frac{B^3}{A}}$$

Usando $k = \frac{d^2U(x_0)}{dx^2}$  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Il pendolo fisico

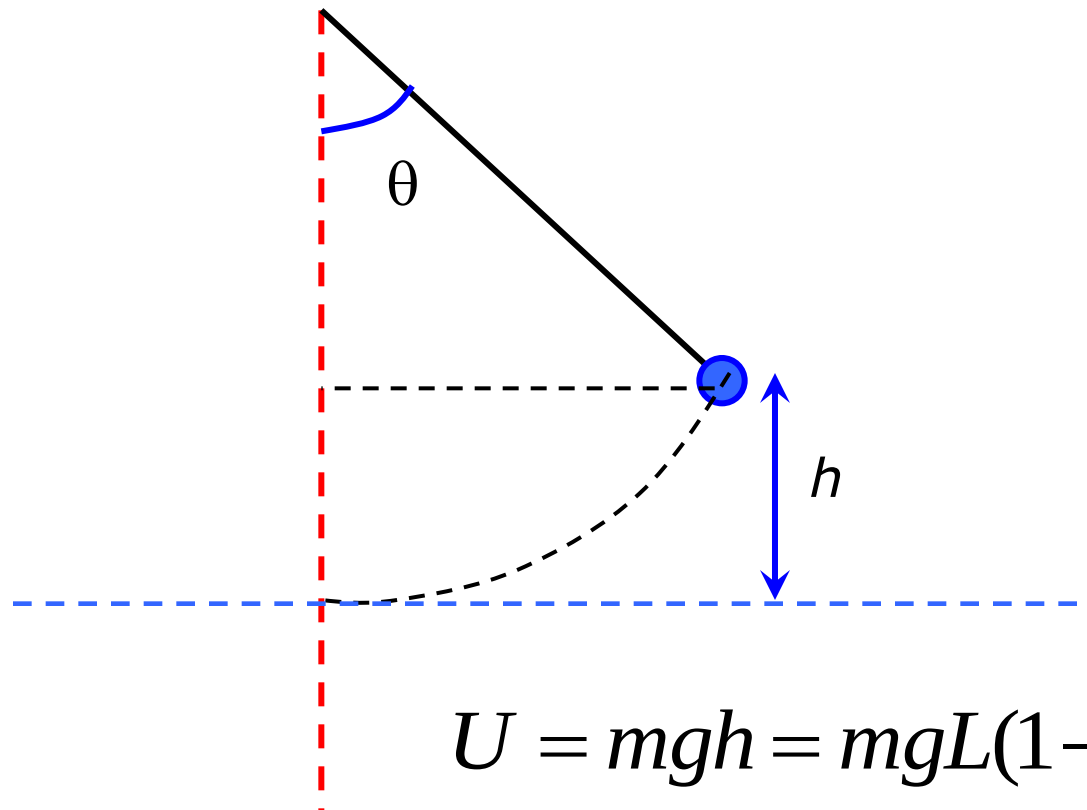
$\theta > 0$ in senso orario

$$s = L\theta$$

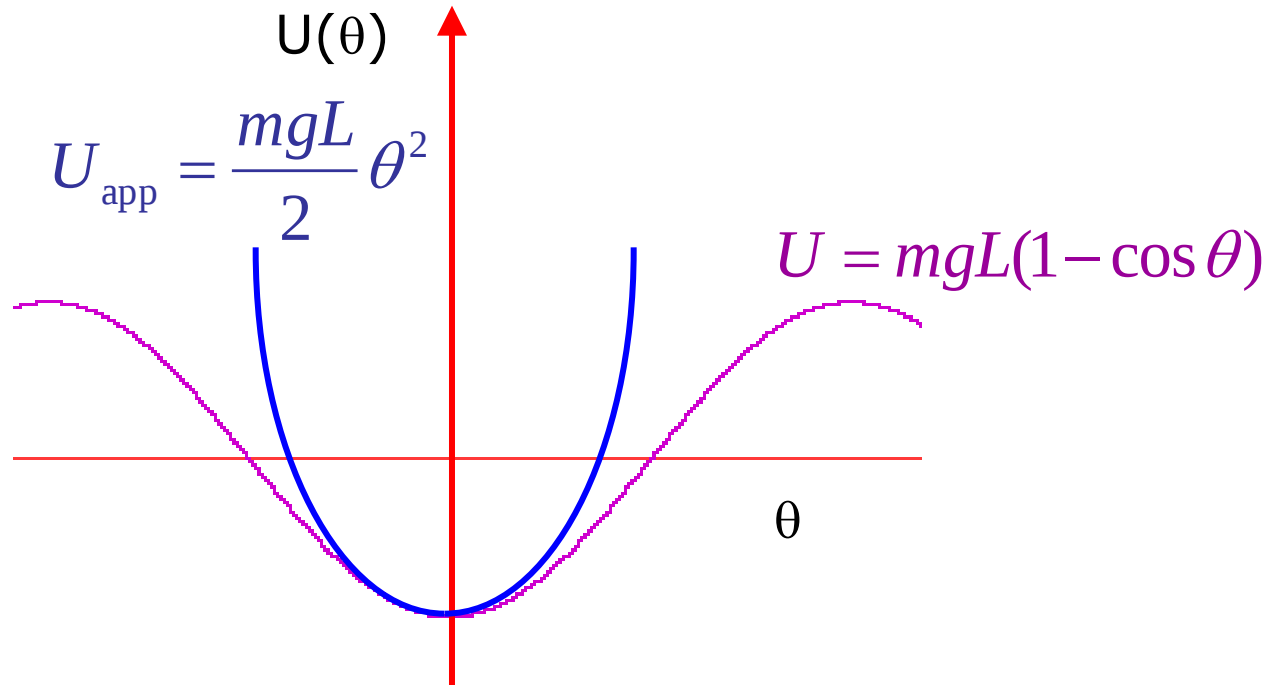


è un caso in cui possiamo applicare il risultato precedente

Energia potenziale del pendolo



Approssimazione con parabola



Verifichiamo che le derivate II dei due potenziali sono uguali in $\theta=0$

$$U_{\text{app}}'' = mgL$$

$$U'' = mgL$$



Energia potenziale approssimata (per piccoli) angoli del pendolo

$$U = \frac{mgL}{2} \theta^2 = \frac{mg}{2L} s^2$$

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{mg}{L} s^2$$

Quindi il pendolo fisico è un oscillatore armonico con pulsazione e periodo:

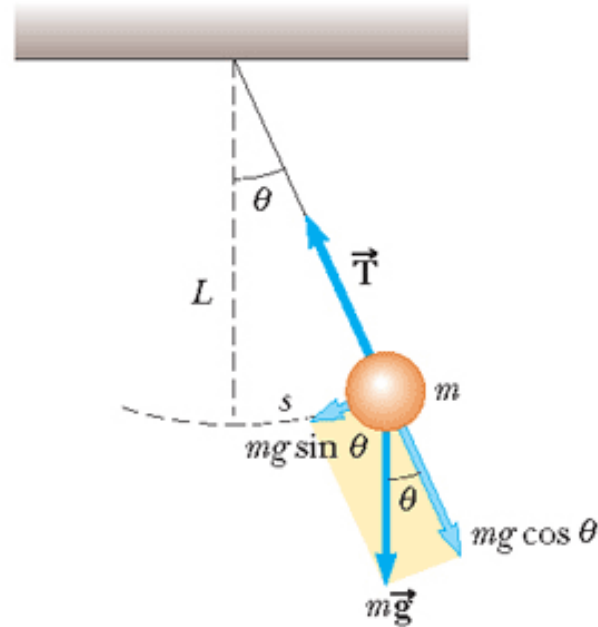
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Partendo dalle forze

$\theta > 0$ in senso orario

$$s = L\theta$$

$$F_{\parallel} = -mg \sin \theta$$



$$ma = m \frac{d^2 s}{dt^2} = mL \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

equazione del pendolo

$$L \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g \sin \theta$$

per angoli piccoli $\sin \theta \approx \theta$

$$L \frac{d^2 \theta}{dt^2} + g \theta = 0 \quad \text{equazione dell'oscillatore armonico}$$

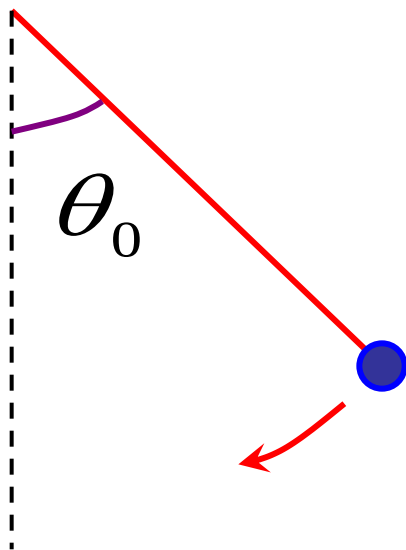
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

soluzioni generiche

Per determinare θ_0 e ϕ si procede come visto prima. Esempi:



Un pendolo spostato di un angolo iniziale θ_0 e lasciato andare seguirà la legge

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t$$

Infatti a $t=0$ $\theta = \theta_0$

mentre la sua velocità iniziale v_0 vale

$$v_0 = -L \theta_0 \sin \omega t = 0$$

Un pendolo messo in movimento dalla posizione verticale con velocità v_0 seguirà la legge

$$\theta(t) = \theta_0 \sin \omega t$$

Infatti a $t=0$ $\theta = 0$

mentre la sua velocità iniziale v_0 ci dà

$$v_0 = \omega L \theta_0 \cos \omega t = \omega L \theta_0$$

per cui

$$\theta(t) = \frac{v_0}{\omega L} \sin \omega t$$

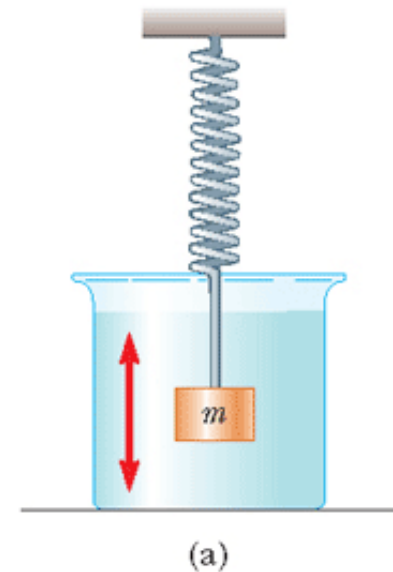
Oscillazioni smorzate

In presenza di attrito le oscillazioni si smorzano e dopo un po' il moto si arresta. Questo avviene sempre nella realtà.

L'equazione in presenza di attrito in genere si scrive

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

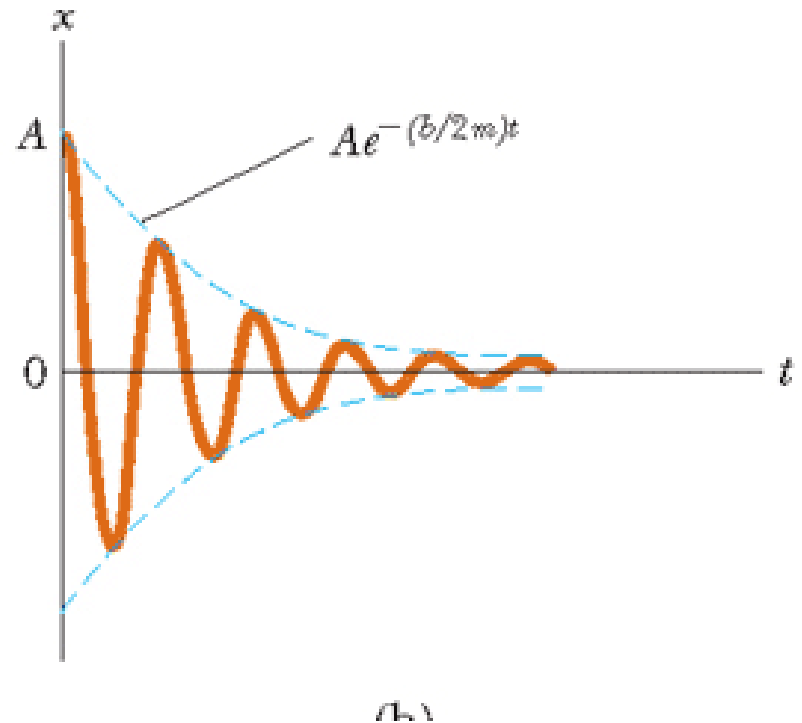

termine di smorzamento
proporzionale alla velocità
(attrito viscoso)



Per b piccoli la soluzione dell'equazione del moto è

$$x = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$



Oscillazioni smorzate per diversi valori dello smorzamento b

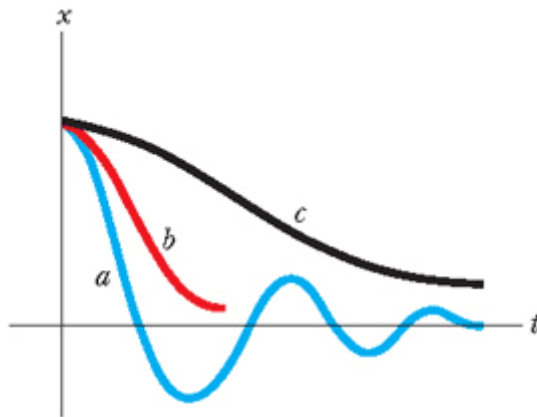


FIGURA 12.15 Andamenti temporali delle posizioni per (a) un oscillatore sottosmorzato, (b) un oscillatore critico e (c) un oscillatore sovrasmorzato.

Se

$$\omega = 0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b_{\text{critico}}}{2m}\right)^2}$$



il sistema non oscilla

Oscillazioni forzate

E' possibile ripristinare l'energia persa per attrito usando una forza esterna periodica

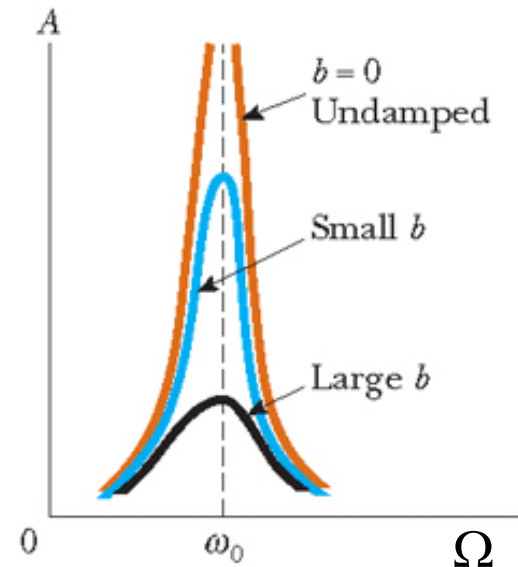
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F \cos \Omega t$$
$$x = A \cos(\Omega t + \varphi)$$

Dopo un periodo iniziale di assestamento il moto ha la pulsazione Ω della **forza esterna** e la sua ampiezza è costante.

Il valore di A dipende criticamente dalla vicinanza di

$$\Omega \text{ e } \omega_0 = \sqrt{k / m}$$

$$A = \frac{F / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \left(\frac{b\Omega}{m}\right)^2}}$$

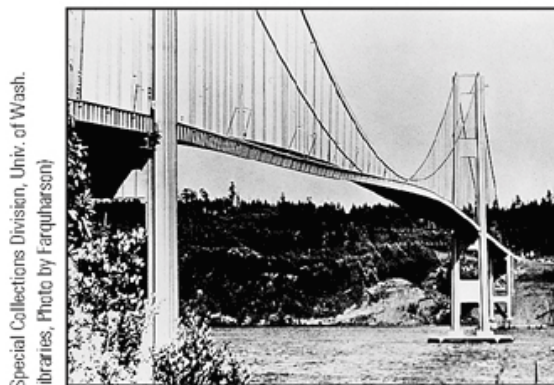


Se lo smorzamento è piccolo si ha il fenomeno della **risonanza** quando la pulsazione (o la frequenza) forzante è vicina alla **pulsazione naturale** del sistema

Alla risonanza si massimizza il trasferimento di energia fra la sorgente esterna e il sistema oscillante. In genere è la situazione che si cerca di realizzare ma a volte si cerca invece di evitarla.

FIGURA 12.17

(a) Nel 1940, venti stazionari hanno innescato delle vibrazioni nel Tacoma Narrow Bridge, causando la sua oscillazione a una frequenza prossima alla frequenza propria della struttura del ponte. (b) Una volta prodotta, questa condizione di risonanza ha portato il ponte al collasso.



(Special Collections Division, Univ. of Wash. Libraries, Photo by Farquharson)

(a)



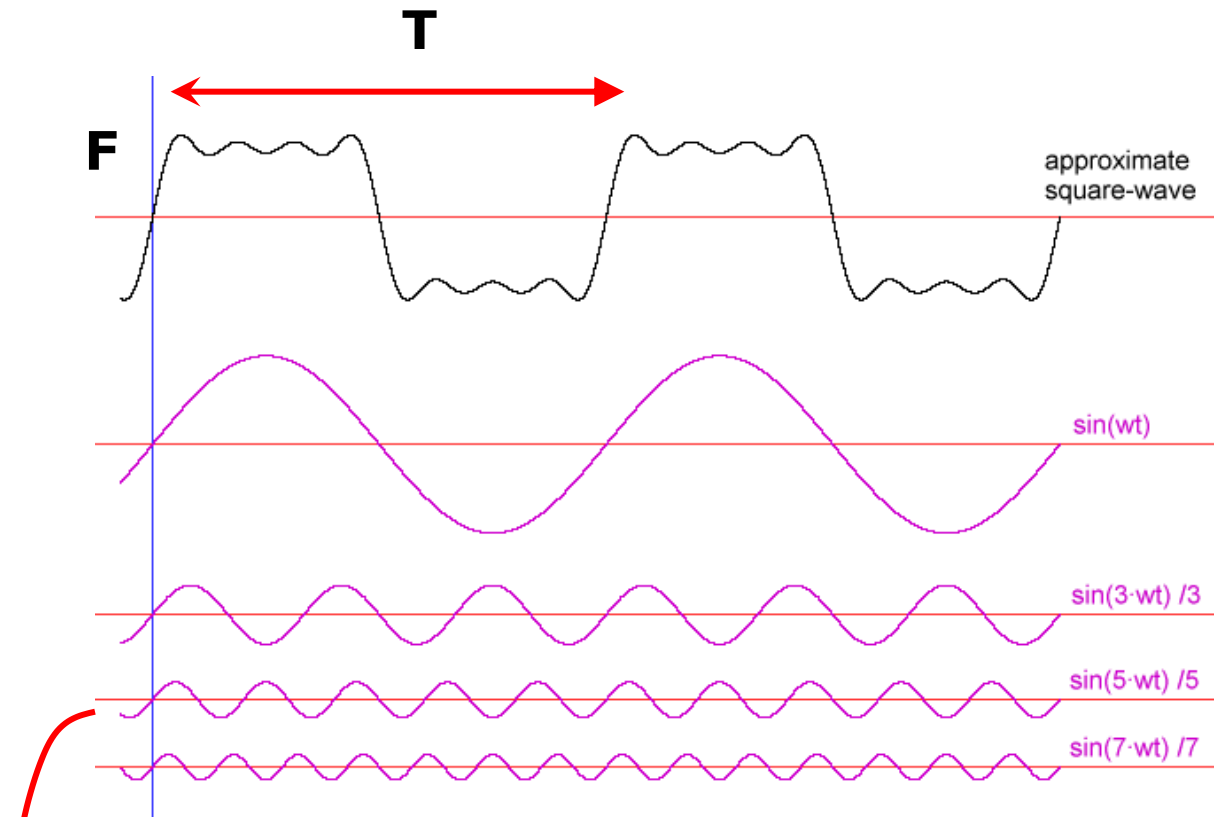
(b)



Serway, Jewett
Principi di Fisica, IV Ed.
EdiSES

La forza esterna non deve necessariamente essere una funzione sinusoidale $\mathbf{F} \cos \Omega t$

➔ *Infatti per il teorema di Fourier basta che una sola delle componenti armoniche abbia una pulsazione prossima alla frequenza di risonanza ω_0*



ad esempio questa componente entra in risonanza con una frequenza $f=5/T$. La sua intensità tuttavia è solo $F/5$