

FISICA GENERALE I

Docente: Prof. G. Carboni
giovanni.carboni@cern.ch

Esercitatore: Dott. R. Petrillo
roberto.petrillo@roma2.infn.it

Anno Accademico 2012- 2013

Queste lezioni sono scaricabili in formato pdf
dalla pagina

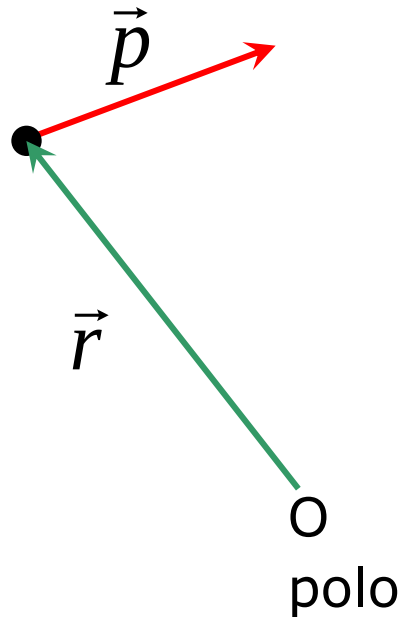
<http://people.roma2.infn.it/carboni>

UTENTE: fis1_studenti
PW: disp_fis1

→ *Necessario Adobe Reader*

Il momento angolare





$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

momento angolare
rispetto al polo O

Il prodotto è il prodotto vettoriale
Il risultato è un **vettore** normale al piano del disegno

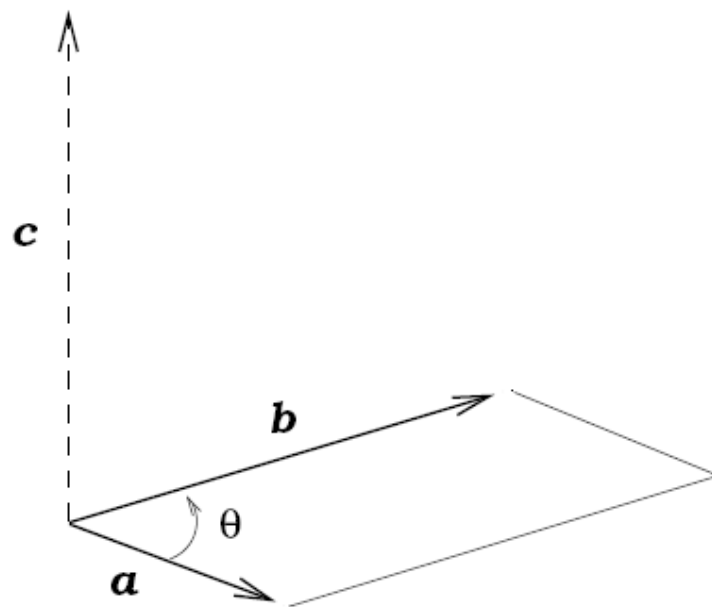
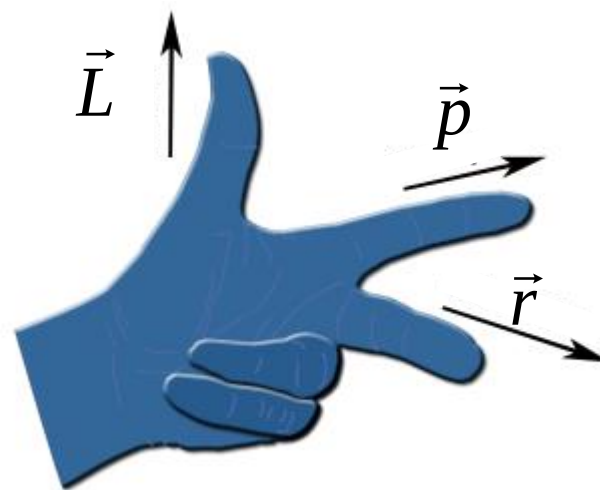


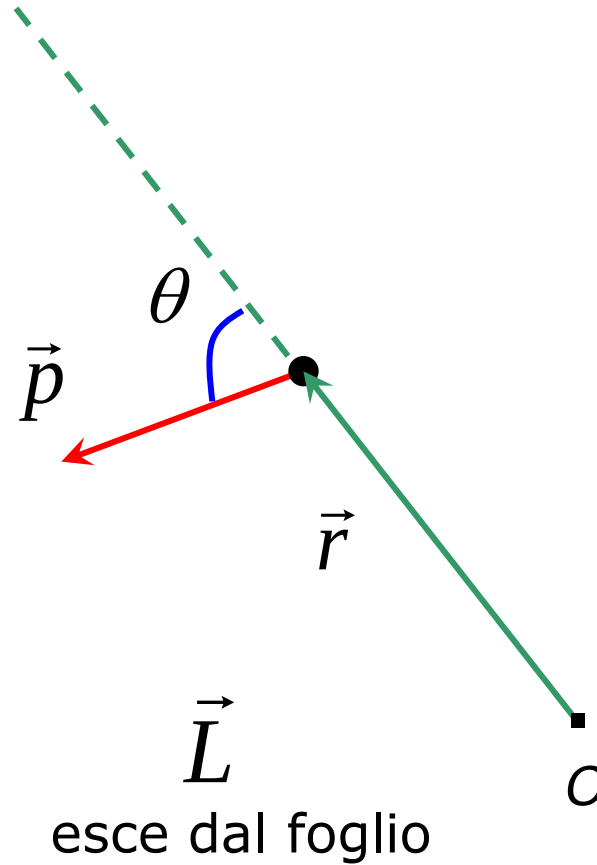
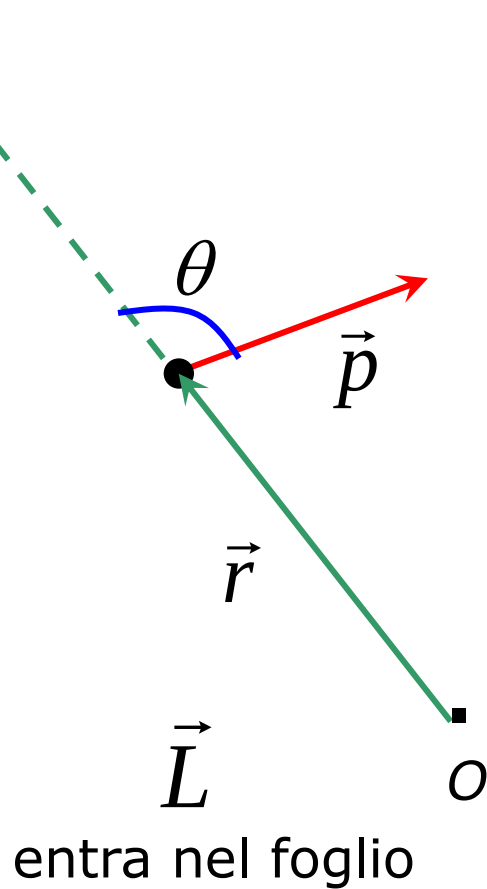
Figura 1. Definizione del prodotto vettoriale $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.



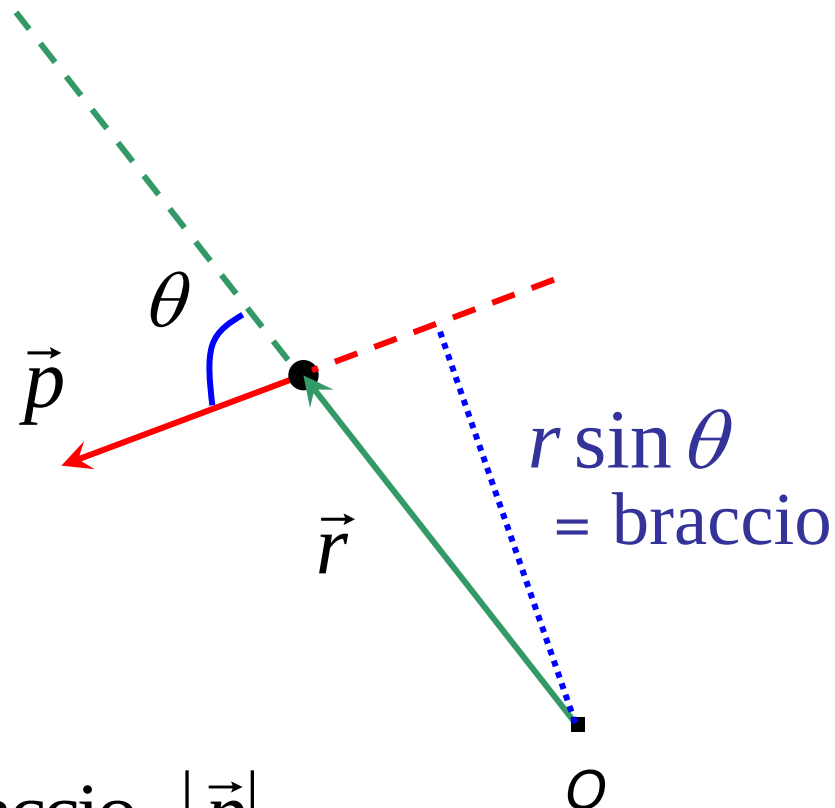
regola della mano sinistra

$$|\vec{L}| = |\vec{r}| |\vec{p}| \sin \theta$$

*Notare la diff. col
prodotto scalare
(sin θ invece di cos θ)*

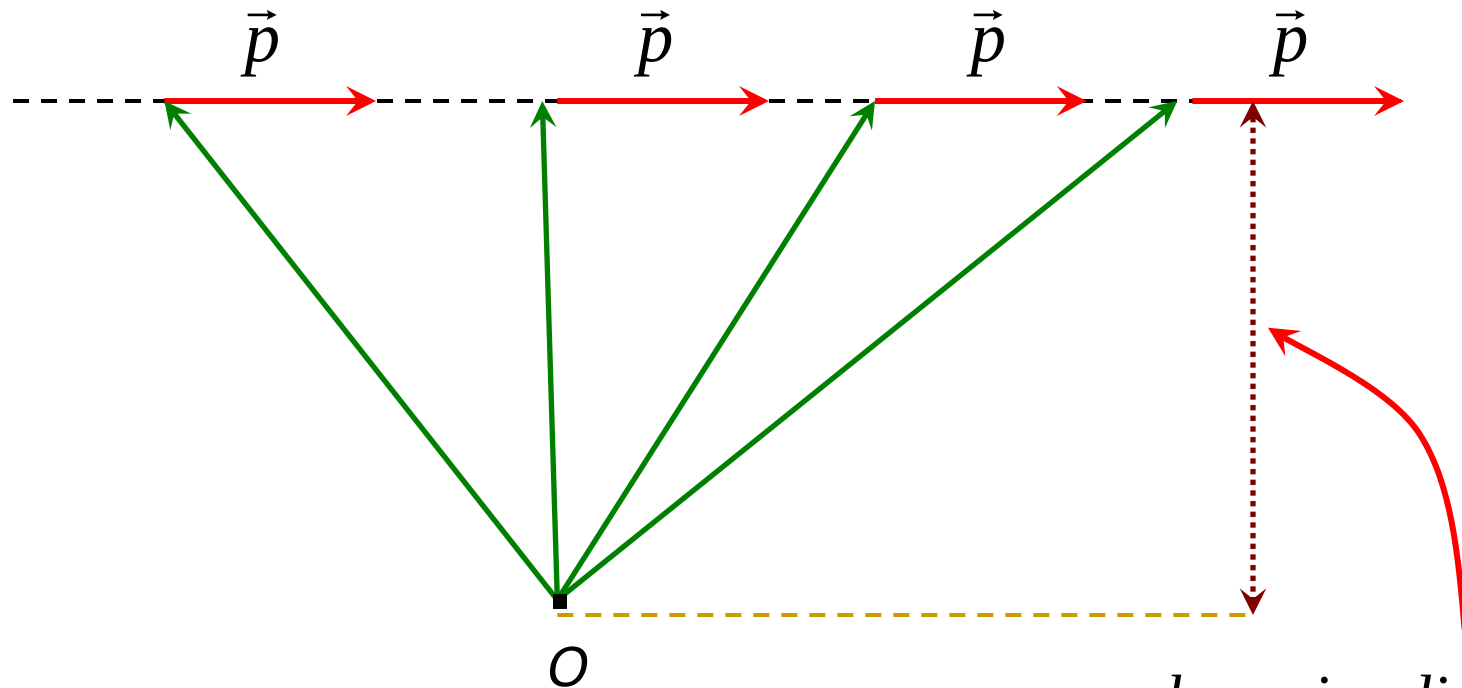


$$|\vec{L}| = |\vec{r}| |\vec{p}| \sin \theta$$



$$|\vec{L}| = \text{braccio} \cdot |\vec{p}|$$

Particella che si muove con $\vec{p} = \text{costante}$

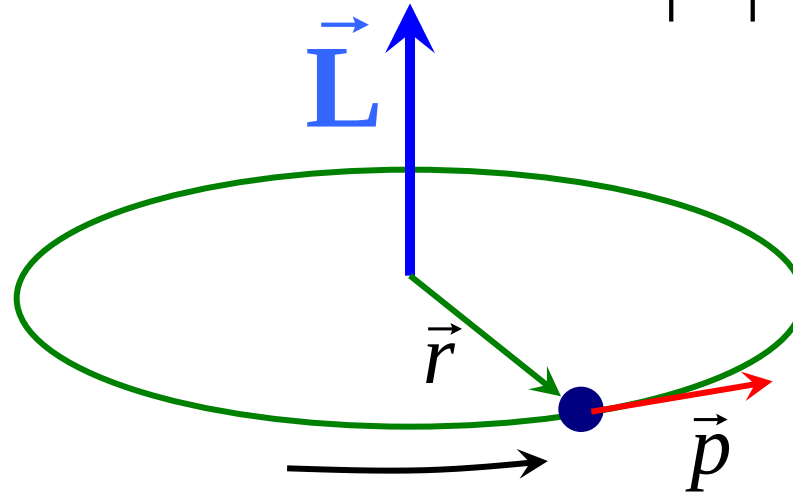


*braccio: distanza fra
la retta di $\vec{p}$ e
il polo O*

$$|\vec{L}| = \text{braccio} \cdot |\vec{p}| = \text{costante}$$

Moto circolare

$$|\vec{L}| = |\vec{r}| |\vec{p}|$$



anche

$$|\vec{L}| = mr^2\omega$$



regola della mano destra

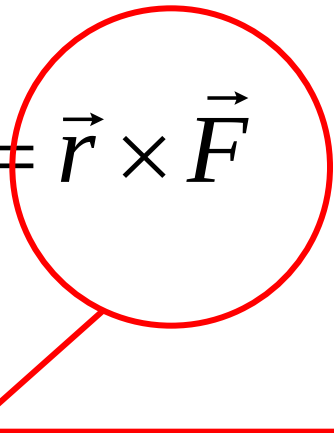
Dinamica

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p})$$

calcoliamo la derivata

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

=0 perché $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ è parallela a $\vec{p}$

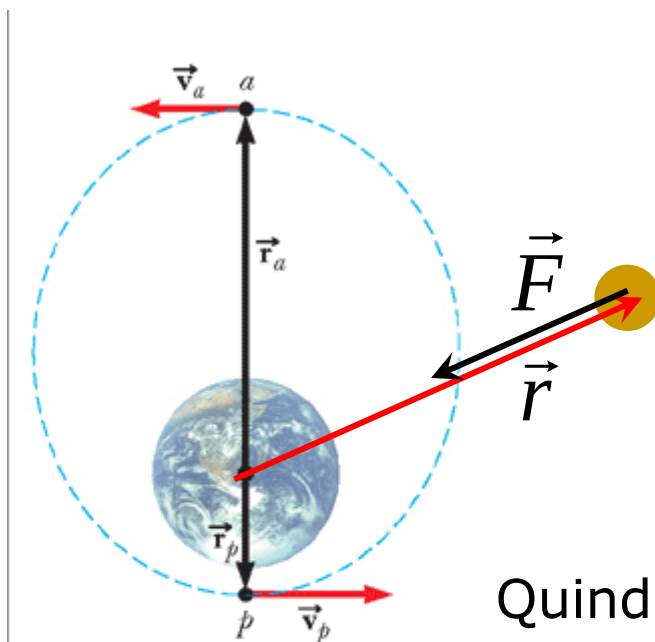
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$


Momento della forza (rispetto al polo O)

Se quindi il momento della forza è nullo il momento angolare si **conserva**

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

In caso importantissimo è quello delle forze centrali



La forza è diretta lungo il raggio per cui ha sempre momento nullo

Quindi nel moto con forza centrale il momento angolare si conserva



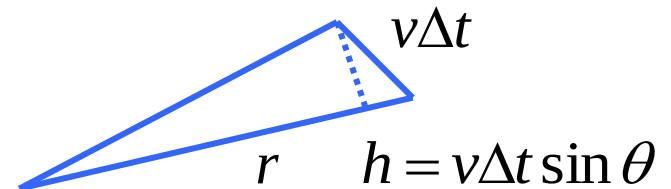
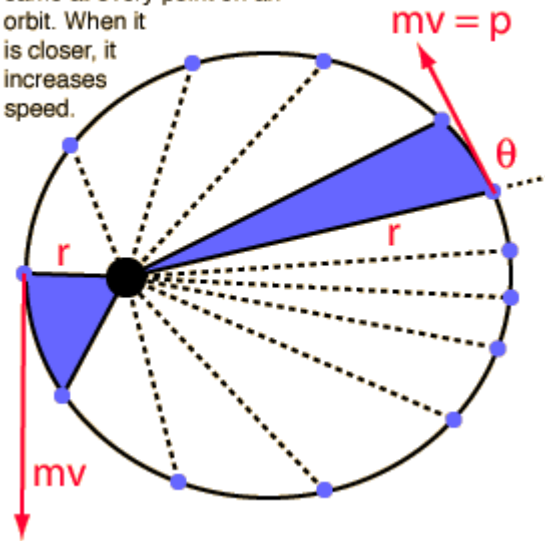
Serway, Jewett
Principi di Fisica, IV Ed.
EdiSES



$$r_p v_p = r_a v_a$$

La conservazione di **L** nel caso di orbita ellittica

The angular momentum is the same at every point on an orbit. When it is closer, it increases speed.



L'area in blu $\Delta A = \frac{\text{base} \cdot \text{altezza}}{2} = \frac{r \cdot (v\Delta t \sin \theta)}{2}$

è proporzionale al momento angolare

Da qui si ricava l'espressione tradizionale della II legge di Keplero:



L'area spazzata dal raggio vettore nell'unità di tempo è costante.

oppure



La velocità areolare è costante

La II legge di Keplero è quindi la conseguenza della conservazione del momento angolare

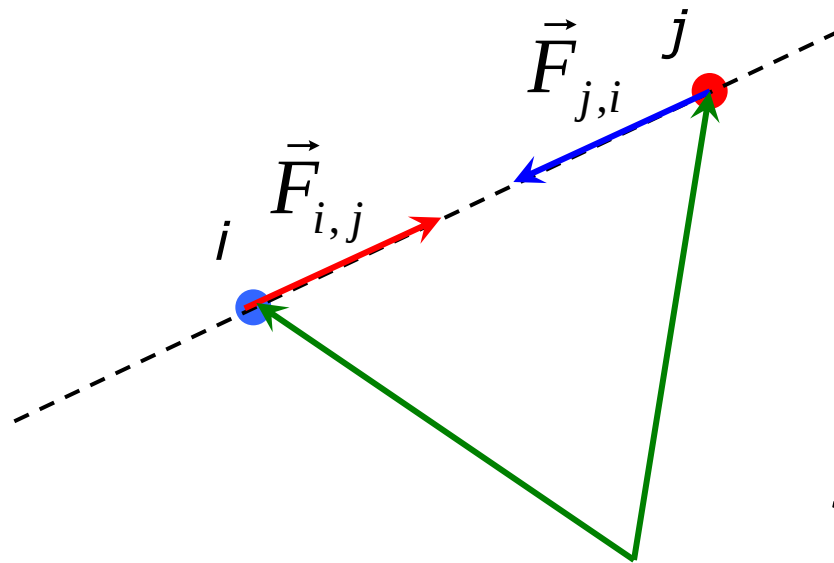
Sistema di particelle

Il momento angolare del sistema è la somma vettoriale dei momenti angolari delle singole particelle

$$\vec{L} = \sum_1^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_1^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Supponiamo il sistema isolato, per cui le sole forze sono quelle interne



Per il principio di azione e reazione le due forze sono uguali ed opposte



Siccome hanno lo stesso braccio anche i loro momenti sono uguali e opposti

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,j} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{j,i} = 0 \quad \text{per ogni coppia } i,j$$

Conseguenza 1

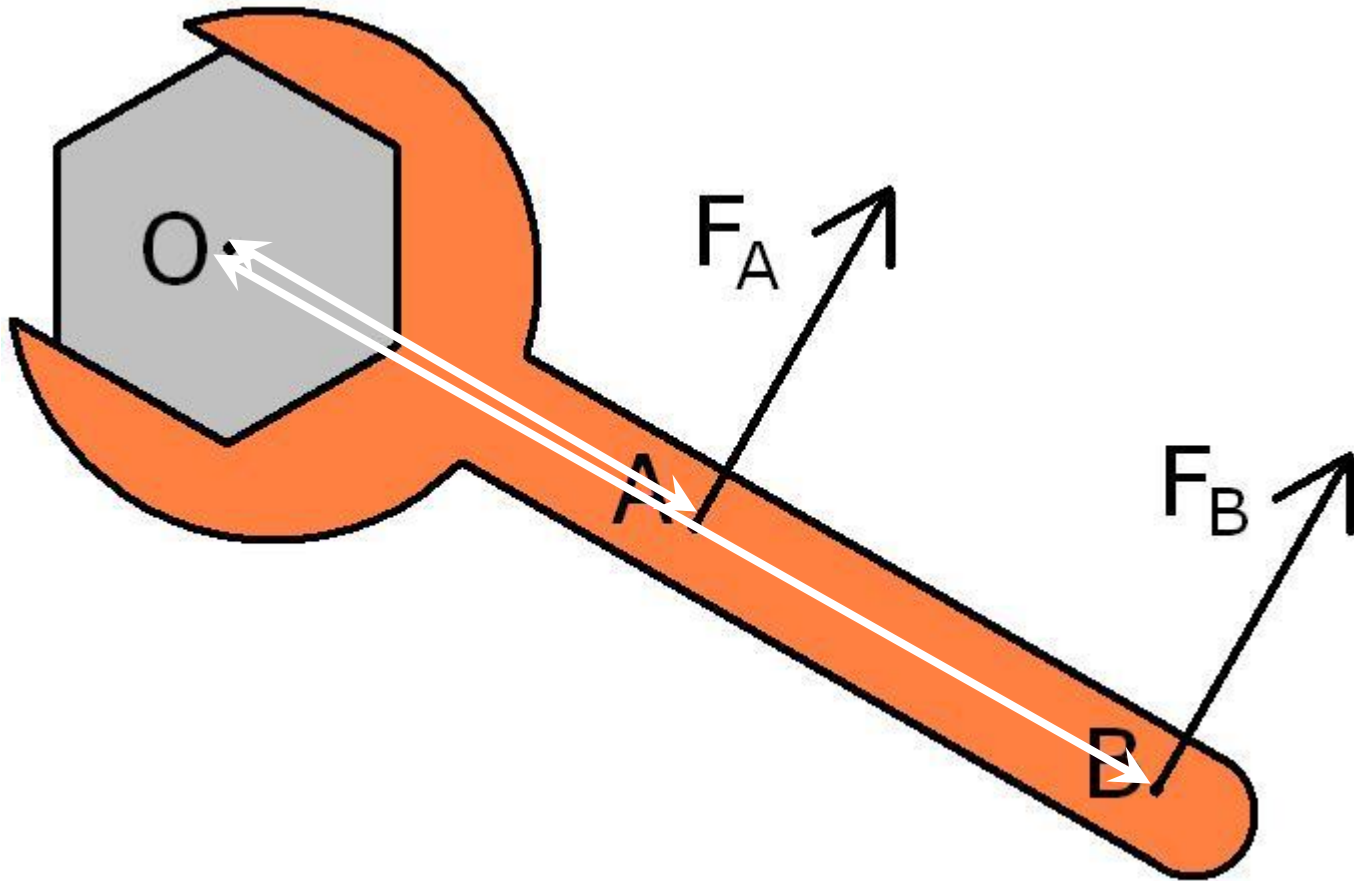
Il momento risultante delle forze interne si annulla

😊 In un sistema isolato il momento angolare totale si conserva

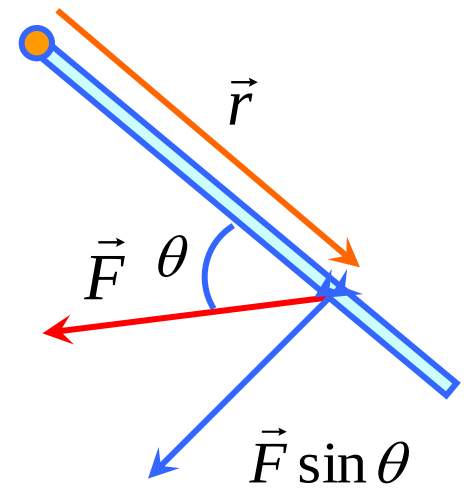
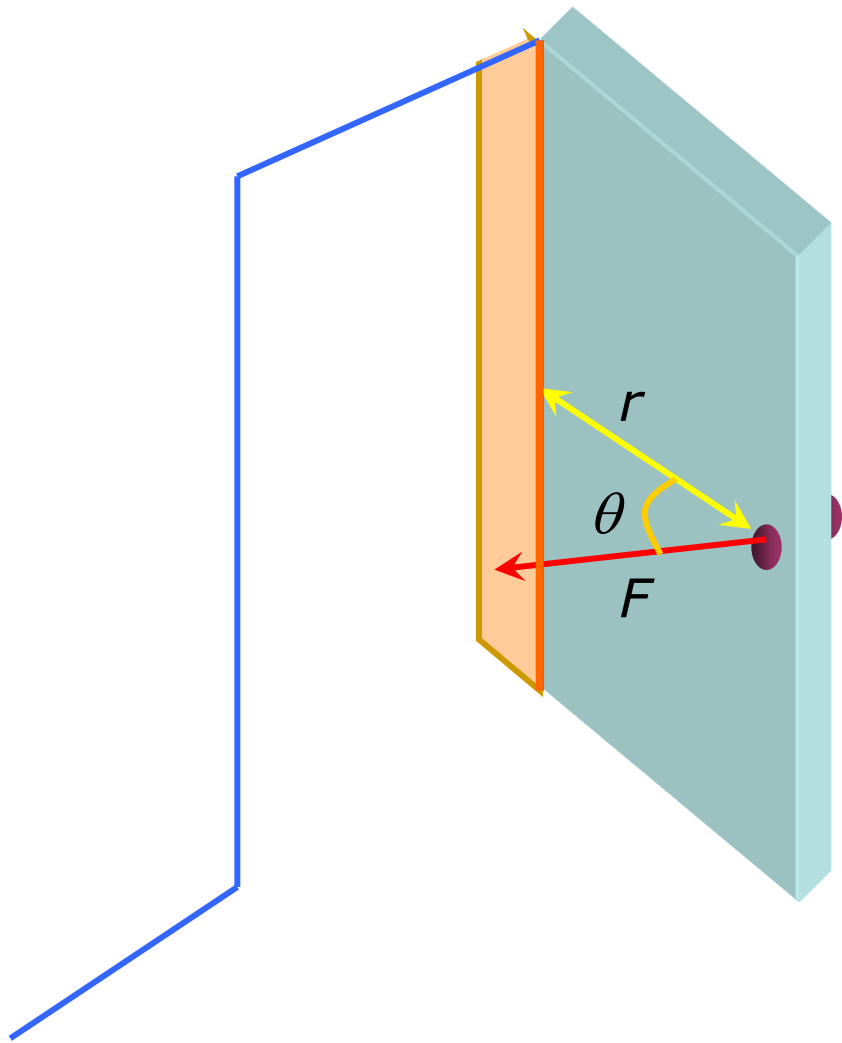
Conseguenza 2

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_1^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(\text{ext})} = \vec{K}_{\text{TOT}}$$

II equazione cardinale



Il massimo effetto si ha per $\theta = 90^\circ$



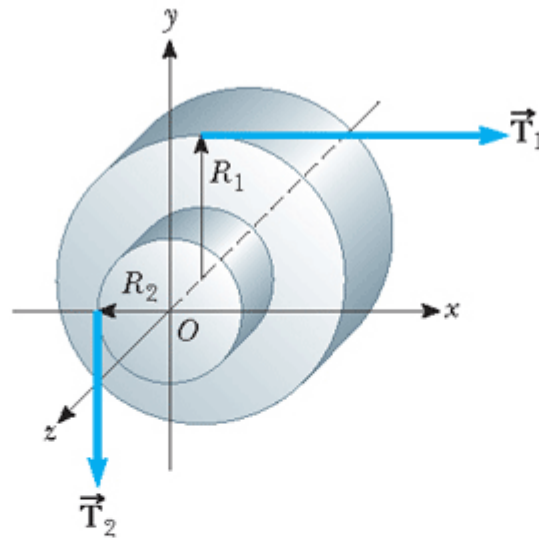


FIGURA 10.14

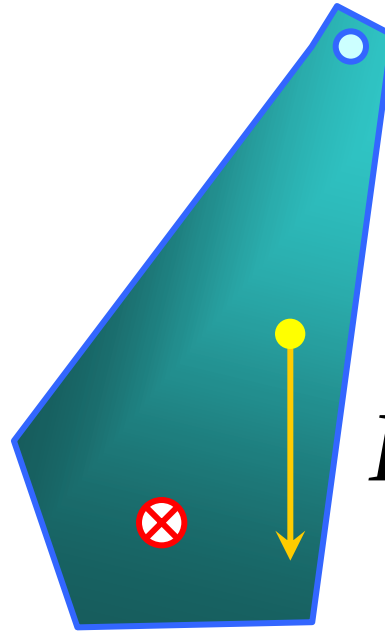
(Esempio 10.6) Un cilindro pieno incernierato sull'asse z per O . Il braccio di $\vec{T}_1$ è R_1 e il braccio di $\vec{T}_2$ è R_2 .



Serway, Jewett
Principi di Fisica, IV Ed.
EdiSES

Momento della forza peso

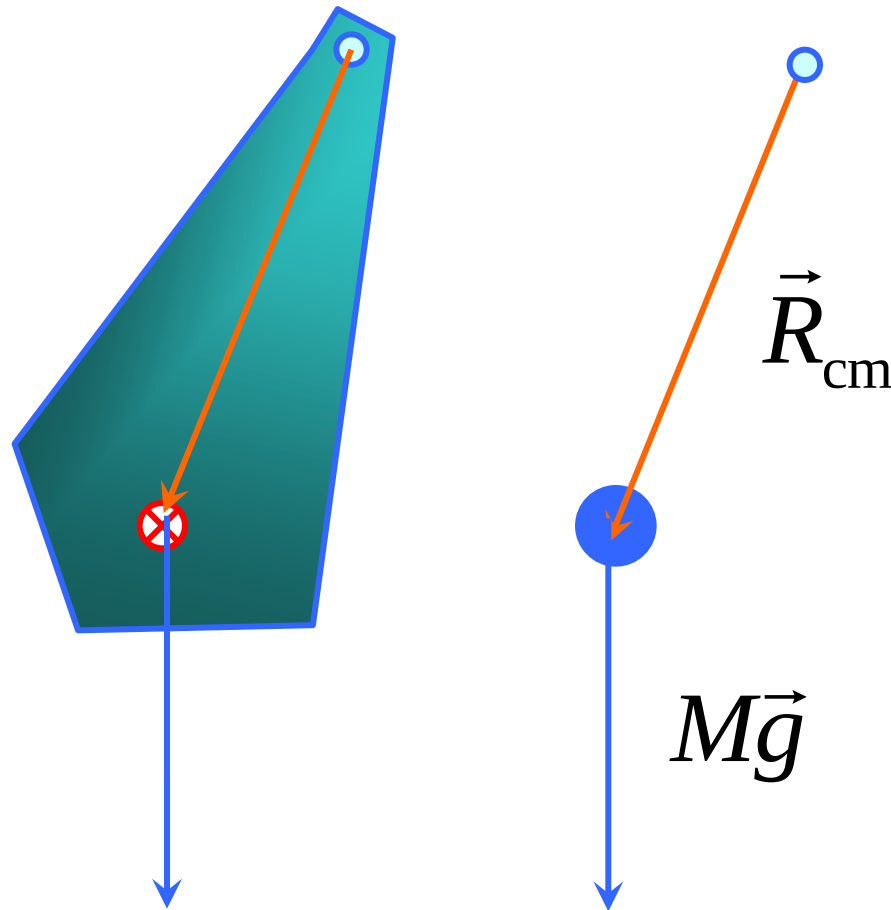
momento
rispetto all'asse



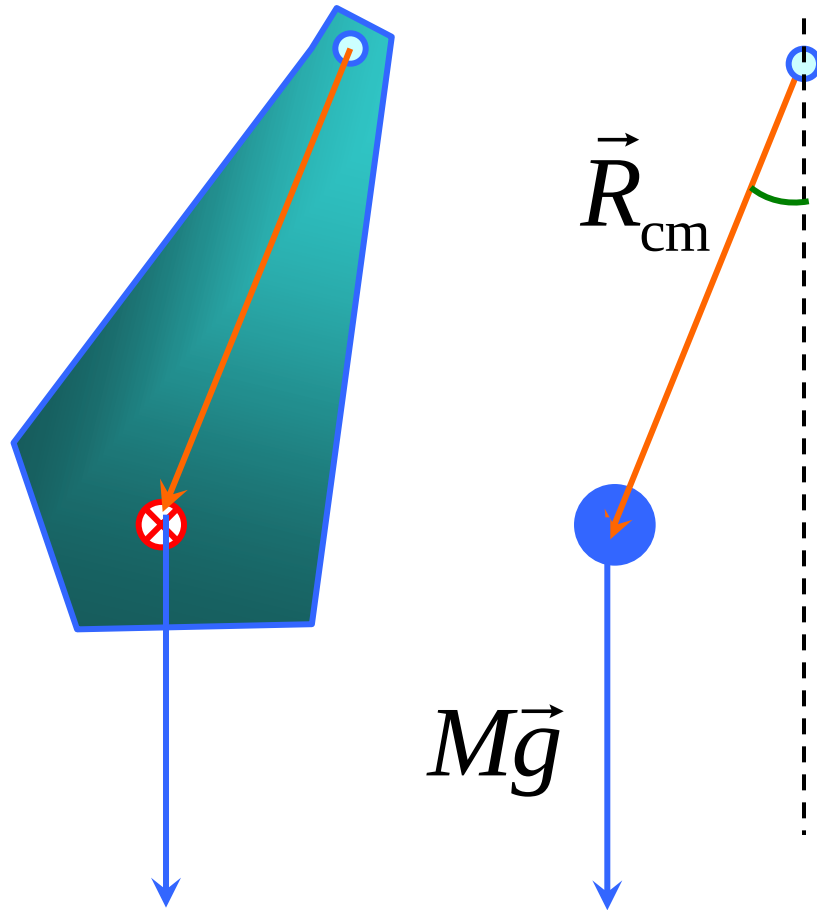
Forza peso che agisce
sugli elementi
 m_i del corpo

$$\vec{F}_i = m_i \vec{g}$$

$$\vec{K} = \sum_1^n m_i \vec{r}_i \times \vec{g} = \frac{\sum_1^n m_i \vec{r}_i}{M} \times M \vec{g} = \vec{R}_{\text{cm}} \times M \vec{g}$$



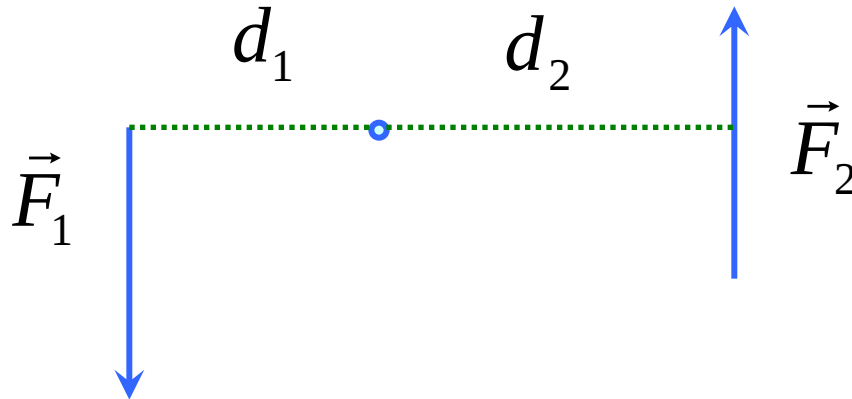
Il momento si calcola come se tutta la massa fosse concentrata nel CM, che è anche il **baricentro** ossia letteralmente in greco il “centro del peso”

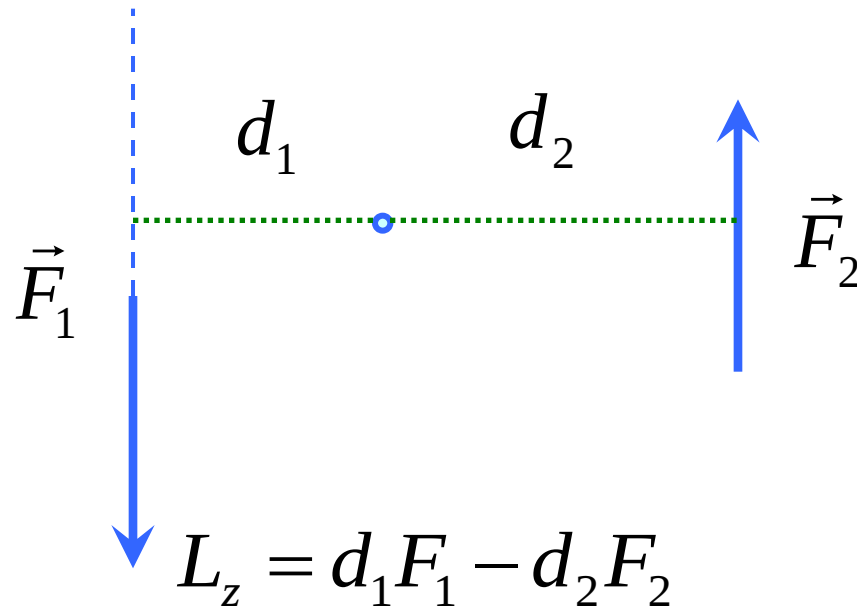


$$K_z = -R_{\text{cm}} Mg \sin \theta$$

Occorre tener presente che il momento angolare e il momento delle forze dipendono dalla scelta del polo.

Tuttavia se un sistema di forze ha risultante nulla allora il momento è indipendente dalla scelta del polo





Se $F_1 = -F_2 = F$

$$L_z = (d_1 + d_2)F$$

Un sistema di forze a risultante nulla è sempre equivalente a una **coppia di forze** che ha lo stesso momento risultante

Corpi rigidi

La I e la II equazione cardinale si applicano a tutti i sistemi di particelle, tuttavia sono particolarmente utili nello studio della dinamica dei corpi rigidi

Corpo rigido → sistema di punti materiali le cui distanze relative sono invariabili nel tempo

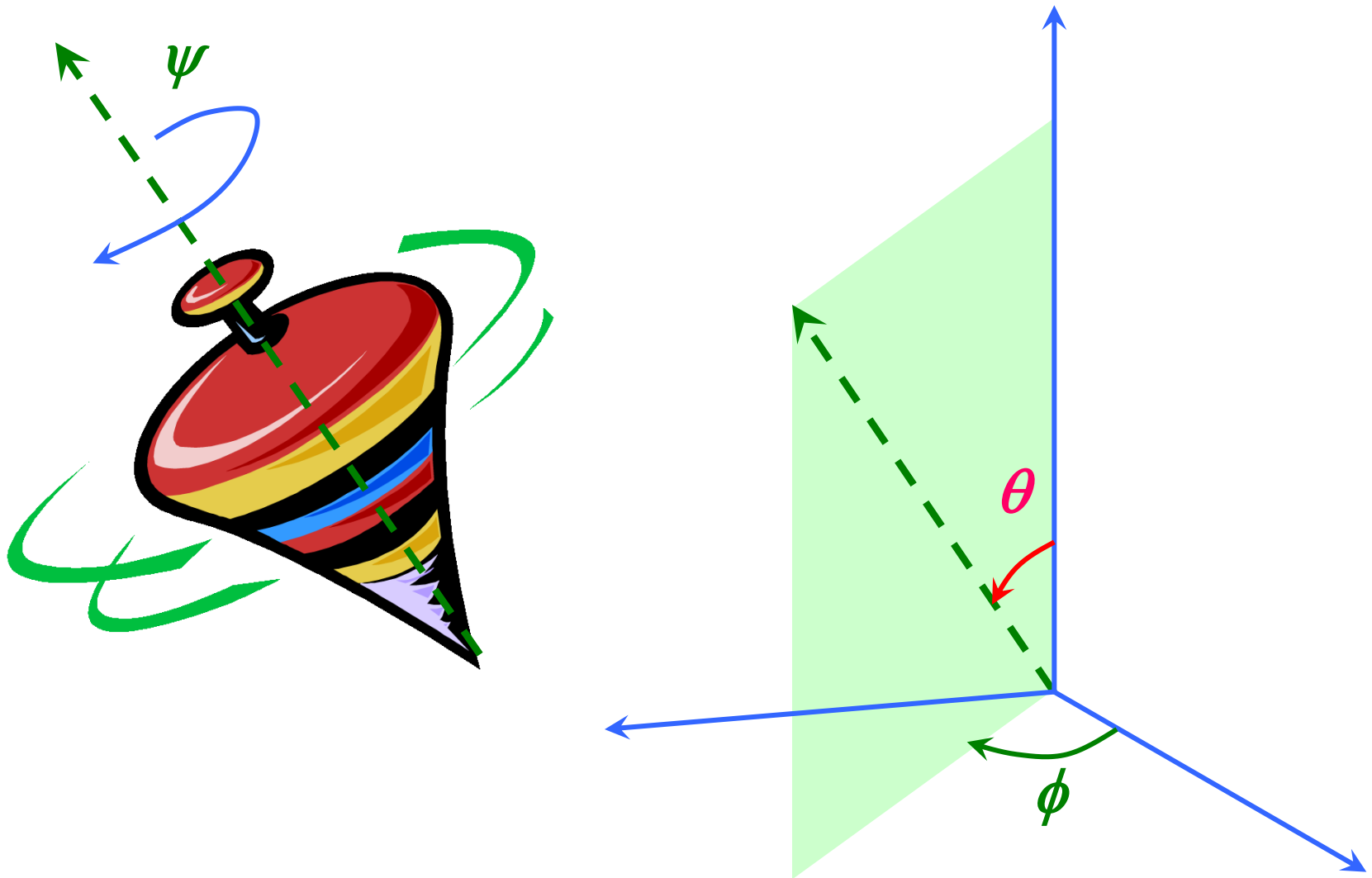
Per descrivere un corpo rigido occorrono

- la posizione di un suo punto, ad esempio il CM
- l'orientamento rispetto a un sistema di riferimento

Nello spazio per il CM ci vogliono 3 coordinate

Per l'orientamento servono 3 angoli

Gli angoli necessari sono 3



Un generico corpo rigido ha quindi 6 gradi di libertà

Il suo moto può essere predetto utilizzando le due equazioni cardinali che forniscono 6 equazioni scalari

Nel caso generale la soluzione è comunque molto complicata

Il problema diventa molto più semplice se il moto è di rotazione intorno a un asse, che può essere fisso o mobile

Rotazione attorno a un asse fisso

Un solo grado di libertà (l'angolo di rotazione)

Ci sono due equazioni cardinali con 1 grado di libertà.

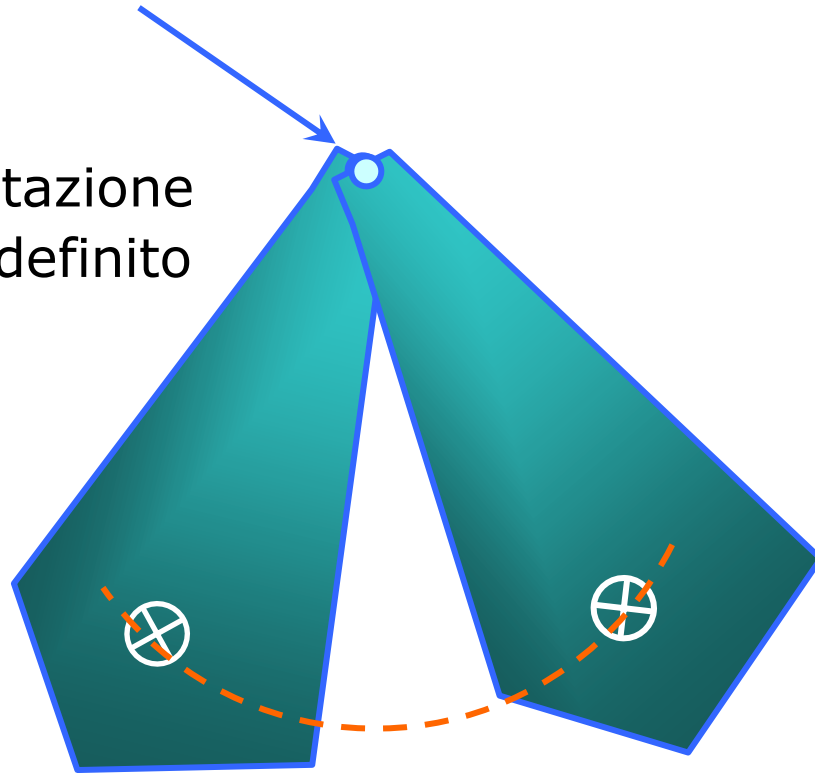
Per determinare la soluzione si usa la II

La II equazione cardinale ci fornirà $\theta(t)$

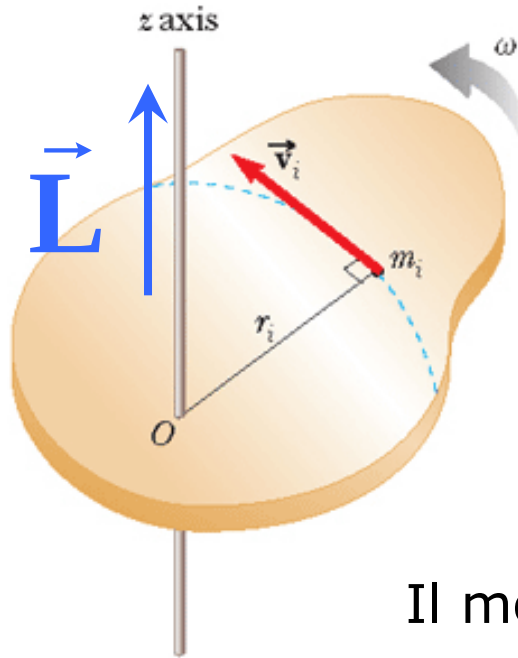
Rotazione intorno a un asse
che non passa per il CM

Il moto del CM è di rotazione
intorno all'asse, ed è definito
da $\theta(t)$.

La II equazione
cardinale ci fornirà
 $\theta(t)$ e ci darà quindi anche il moto
del CM. Pertanto basta la II equazione per conoscere
completamente il moto del sistema



Come calcolare il momento angolare



Scomponiamo il corpo rigido
in tanti punti materiali di massa m_i

Ciascuno compie un moto rotatorio
intorno all'asse:

$$v_i = \omega r_i$$

Il momento angolare della massa i-esima è

$$L_{z,i} = m_i r_i^2 \omega$$

$$L_z = \left(\sum_1^N m_i r_i^2 \right) \omega = I_z \omega$$

I_z è il **momento d'inerzia** del corpo attorno all'asse z

$$I_z = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$$

Il momento d'inerzia I_z o, più brevemente, I dipende

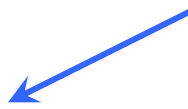
- dalla forma del corpo
- dalla scelta dell'asse di rotazione

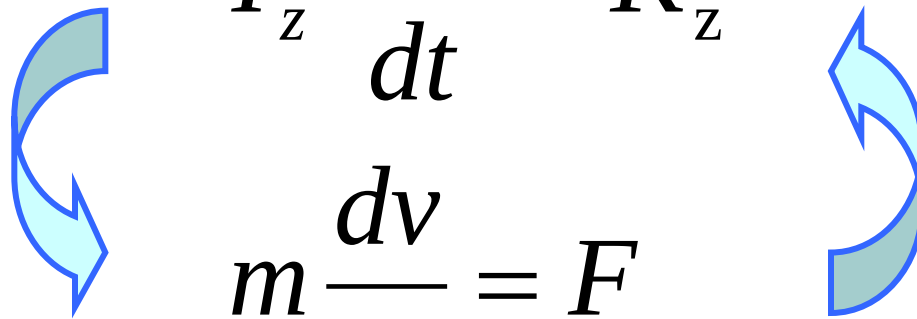
Una volta calcolato ci dà la relazione necessaria fra momento angolare e angolo di rotazione (o meglio velocità angolare)

La II equazione cardinale diventa quindi

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = K_z^{\text{tot}}$$

*componente
lungo l'asse del
momento delle
forze*

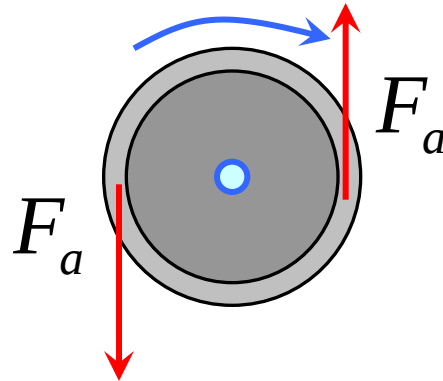



$$I_z \frac{d\omega}{dt} = K_z^{\text{tot}}$$
$$m \frac{dv}{dt} = F$$

La II equazione cardinale per un corpo in rotazione attorno a un asse fisso è l'analogo della legge di Newton per un corpo libero

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{accelerazione angolare}$$

Ruota di raggio R frenata da forza d'attrito



$$K = 2RF_a \quad I_z \alpha = -2F_a R$$

Moto uniformemente decelerato

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

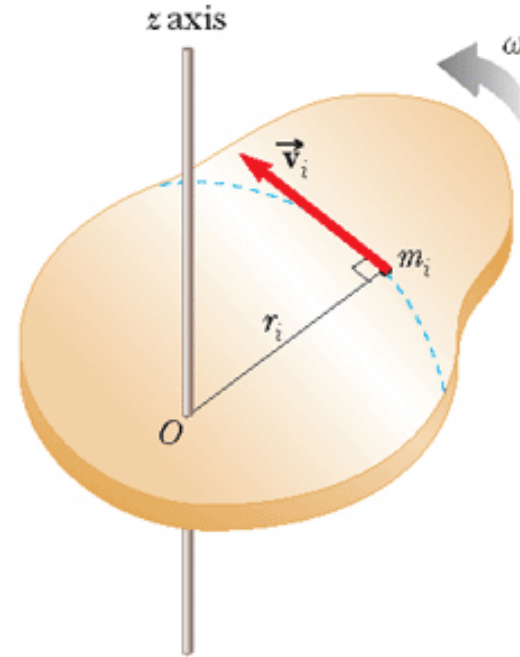
Energia di rotazione

Ogni singolo punto materiale ha un'energia cinetica

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

e in totale

$$T = \frac{1}{2} \left(\sum_1^N m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

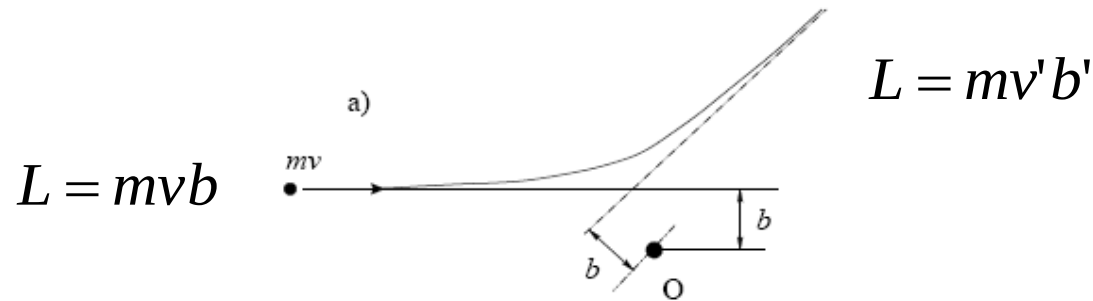


Punto materiale		Corpo rigido in rotazione
m		I
v		ω
$p=mv$		$L=I\omega$
$\frac{1}{2}mv^2$		$\frac{1}{2}I\omega^2$

Appendice

In un campo di forza centrale le traiettorie aperte sono iperboli

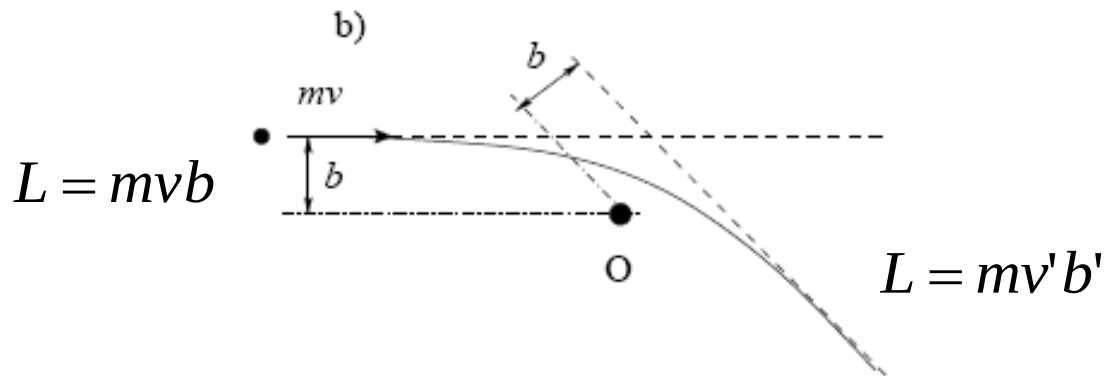
Per esempio in un urto fra due protoni (forza repulsiva) la traiettoria è



$v' = v$ (conservazione energia)

$b' = b$ (conservazione momento angolare)

In un urto fra elettrone e protone o fra asteroide e pianeta (forza attrattiva)



$$v' = v \text{ (conservazione energia)}$$

$$b' = b \text{ (conservazione momento angolare)}$$