

FISICA GENERALE I

Docente: Prof. G. Carboni
giovanni.carboni@cern.ch

Esercitatore: Dott. R. Petrillo
roberto.petrillo@roma2.infn.it

Anno Accademico 2012- 2013

Queste lezioni sono scaricabili in formato pdf
dalla pagina

<http://people.roma2.infn.it/carboni>

UTENTE: fis1_studenti
PW: disp_fis1

La misura e l'incertezza

Importanza dello strumento



precisione

- 1 mm
- $\frac{1}{2}$ cm

Il calibro misura con precisione di 0,1 mm



$$\underbrace{x_0 - \delta x < x < x_0 + \delta x}_{\text{intervallo di confidenza}}$$

x è il valore vero della grandezza

x_0 è il valore misurato

δx è l'incertezza o errore della misura

Cifre significative



qui ne abbiamo quattro

qui ne abbiamo tre
(alcuni anni fa...)



In entrambi i casi viene dato il prezzo al millesimo di euro. Significa che l'errore dovrebbe essere inferiore a 0,001 €, e potremmo allora supporre un'incertezza di 0,0005 €.

 4 cifre

Se metto nel serbatoio 32,50 litri di E-Diesel spendo quindi

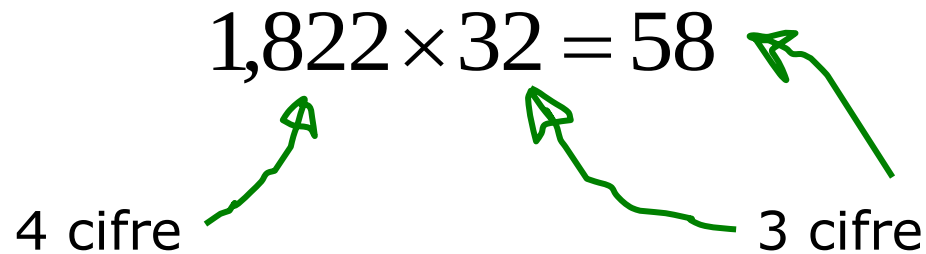
$$1,822 \times 32,50 = 59,215 \quad 5 \text{ cifre}$$

ma l'incertezza per litro è 0,0005 € quindi sul totale sarà 0,01625 € (1,62 c€). Allora la spesa totale potrebbe essere compresa fra 59,231 e 59,199 €, ossia l'incertezza è sulla quarta cifra decimale. Inutile quindi dare 5 cifre. Pertanto

$$1,822 \times 32,50 = 59,21$$

(e non abbiamo messo l'incertezza sui litri)

Se invece scrivo che i litri sono 32,5 litri (3 cifre significative)
l'incertezza sul calcolo è determinata da queste 3 cifre per cui

$$1,822 \times 32 = 58$$


4 cifre 3 cifre

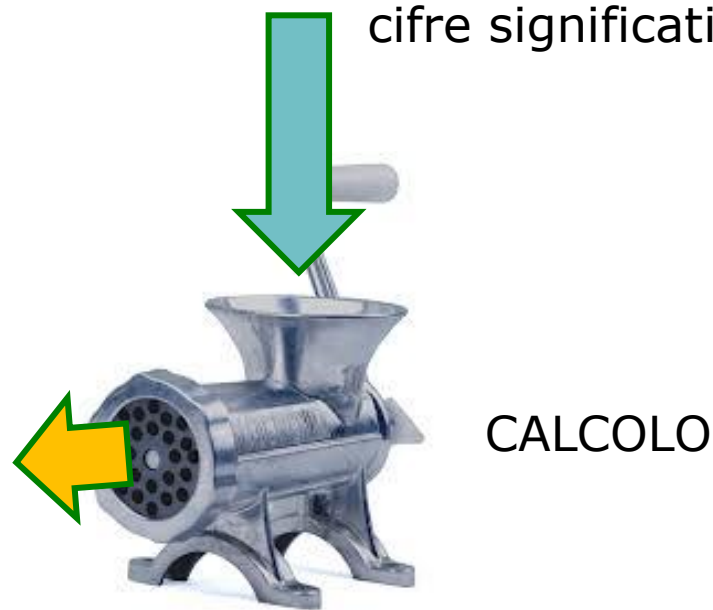
- ➔ gli zeri iniziali non contano nel calcolo delle cifre
- ➔ 0,00054 ha due cifre soltanto

Morale: bisogna sempre portarsi dietro nei calcoli il numero di cifre significative di partenza, che va scelto come il **minore** fra le grandezze in gioco

RICORDARE

2,5 ha due cifre
2,50 ne ha tre
0,5 ne ha una
0,05 ne ha una
0,054 ne ha due

stesse cifre
significative in uscita



“Ragionevole certezza” ?

90% , 95%, 99,99% ?

Il significato di una certezza al 95% significa **per definizione** **(ISO)** che io sono disposto a scommettere 95 € contro di te che scommetti solo 5 € (oppure 950 contro 50)

Una certezza al 99,99% significa che mi gioco senza problemi 99,99 € contro 1 centesimo di €

Un altro modo di vedere la cosa è di pensare che se la misura viene ripetuta 100 volte troverò una conferma 95 volte.

Oppure posso dire che, ripetendo la misura, ho una probabilità $P=0,95$ di ritrovare lo stesso valore.

Aggiungiamo per chiarezza che

$P = 95\%$ è lo stesso che dire $P=0,95$

Per definizione inoltre

$$P \leq 1 \quad \text{o anche} \quad P \leq 100\%$$

Il concetto di “scommessa” associato alla probabilità ha risvolti inattesi

Supponiamo che per incassare un pagamento di 1000 € io debba fare un viaggio di 600 km in auto e che la probabilità di avere un incidente mortale sia $P=10^{-6}$

Se arrivo “vinco” 1000 € con $P_1=1-10^{-6} = 0,999999 \cong 1$

Se non arrivo perdo la vita con $P_2 = 10^{-6}$

Quanto vale per me la mia vita? $1000 \text{ €}/10^{-6} = 1 \text{ G€}$

Spesso 99% è sinonimo di **certezza**

Si capisce invece subito in questo contesto che una probabilità del 99% di arrivare vivi sarebbe considerata inaccettabile. Infatti se arrivo “vinco” 1000 € con $P_1 = 0,99$. Se non arrivo perdo il valore della vita con $p_2 = 1 - p_1 = 0,01$.

$$\text{Vita} \times p_2 = 1000 \text{ €} \times 0,99 = 990 \text{ €}$$

$$\text{Vita} = 990 \text{ €} / 0,01 = 99000 \text{ €}$$

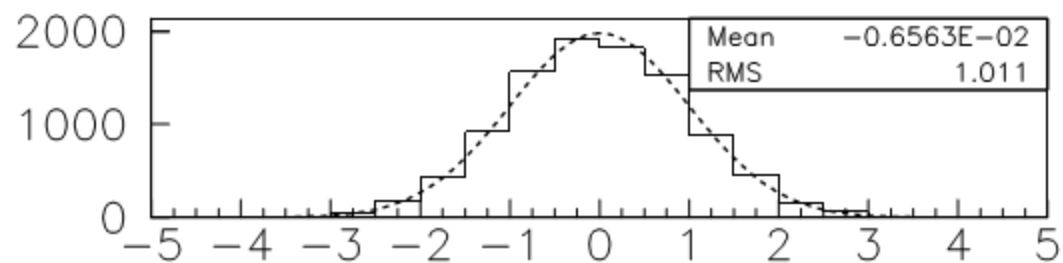
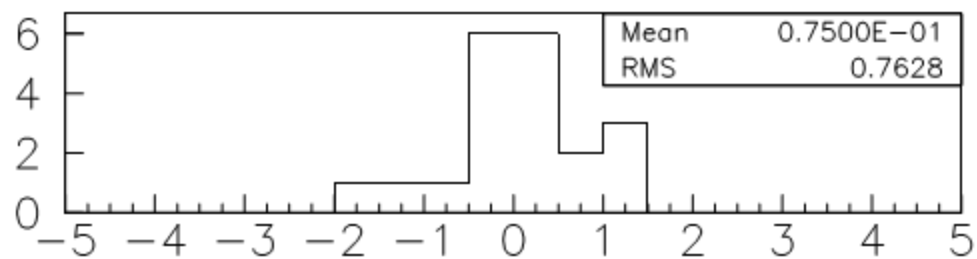
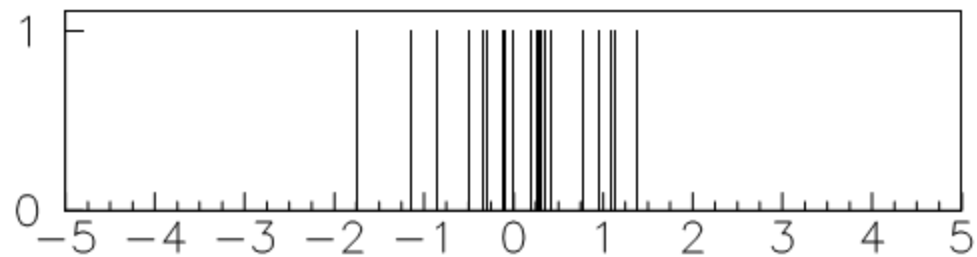
Intervalli di confidenza tipici

Per una misura definiamo errore standard quello associato a un intervallo del 68%, (che non è una gran certezza).

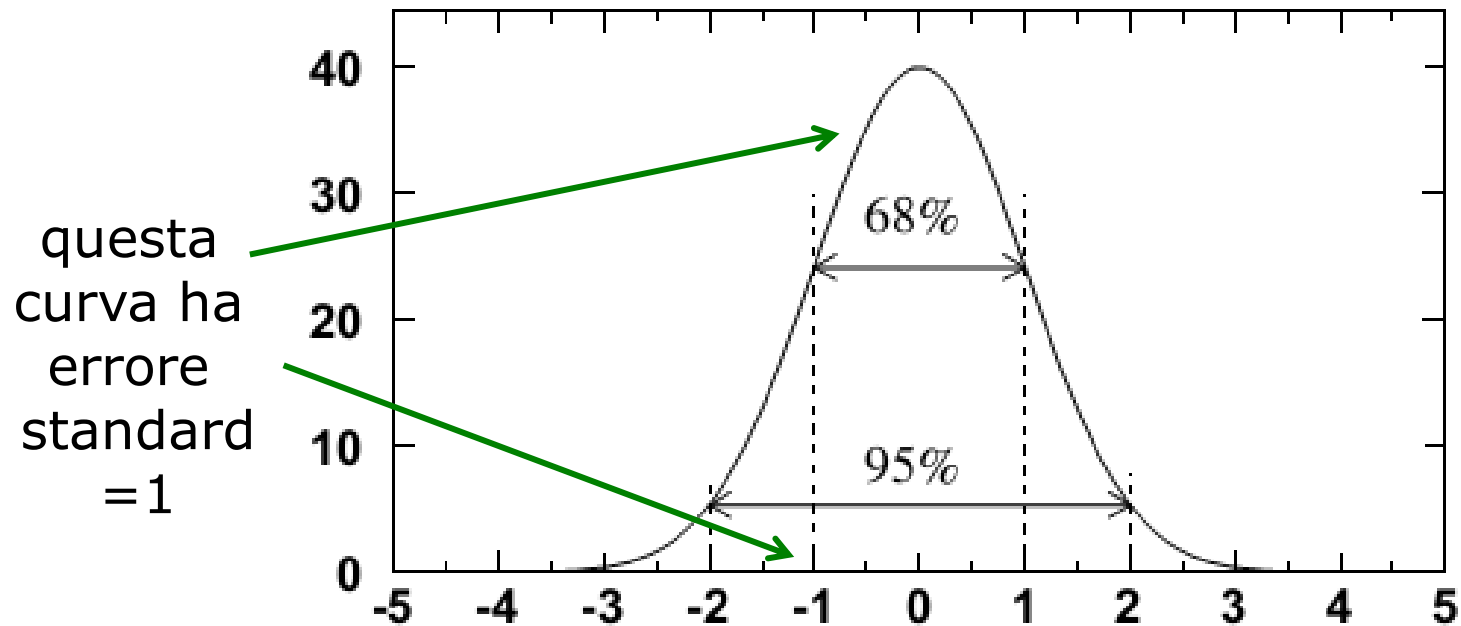
In Fisica spesso per affermare che esiste evidenza di un fenomeno si pretende un livello di confidenza del 99,7%: scommessa di 997 € contro 3 €.

Per affermare una scoperta si richiede addirittura $1 - (5,7 \times 10^{-7}) = 0,99999943$ ossia uno è pronto a scommettere circa 1,75 M€ contro 1 €.

L'intervallo di confidenza del 68%
viene fuori dalla distribuzione empirica
degli errori di misura



La distribuzione normale o curva di Gauss



Area totale sotto la curva = 1

Costante di gravitazione G

errore standard

$$G = 6,67384 \pm 0,00080 \sigma$$


Se ripetiamo n volte una nuova misura di G potremo trovare

- un valore distante da questo non oltre 1σ nel 68% dei casi
- un valore distante da questo oltre 2σ nel 5% dei casi
- un valore distante oltre 3σ nel $2,7 \cdot 10^{-3}$ dei casi
- un valore distante oltre 4σ in 1 caso su 15873
- un valore distante oltre 5σ in 1 caso su 1,75 milioni
- un valore distante oltre 6σ in un caso su 500 milioni

Combinazione di più misure

$$\text{Area} = a \times b$$

Errore sul lato $a : \pm \Delta a$

Errore sul lato $b : \pm \Delta b$

Quanto vale l'errore sull'area?

$$\text{Area} = S = a \times b$$

Utilizzando il massimo valore errato dei lati

$$S' = (a + \Delta a) \times (b + \Delta b) = \\ a \times b + \Delta a \times b + a \times \Delta b + \Delta a \times \Delta b$$

$$\Delta S = S' - S = \Delta a \times b + a \times \Delta b + \Delta a \times \Delta b$$

Se gli errori sono piccoli rispetto alle lunghezze trascuriamo l'ultimo pezzo

$$\Delta S = S' - S = \Delta a \times b + a \times \Delta b$$

Notiamo che se avessimo sbagliato in meno entrambe le misure anche ΔS cambierebbe di segno

L'errore relativo è il rapporto fra l'errore e la grandezza

$$\frac{\Delta S}{S} \quad \frac{\Delta a}{a} \quad \frac{\Delta b}{b}$$

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta a \times b}{a \times b} + \frac{a \times \Delta b}{a \times b} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

Quindi l'errore relativo su un **prodotto** è la **somma** degli errori relativi

Se le misure dei due lati sono **indipendenti o scorrelate** a volte potrà accadere che, mentre faccio un errore positivo su un lato, lo faccio negativo sull'altro e ho quindi una parziale compensazione.

Per tener conto di questo fatto la somma non viene fatta linearmente

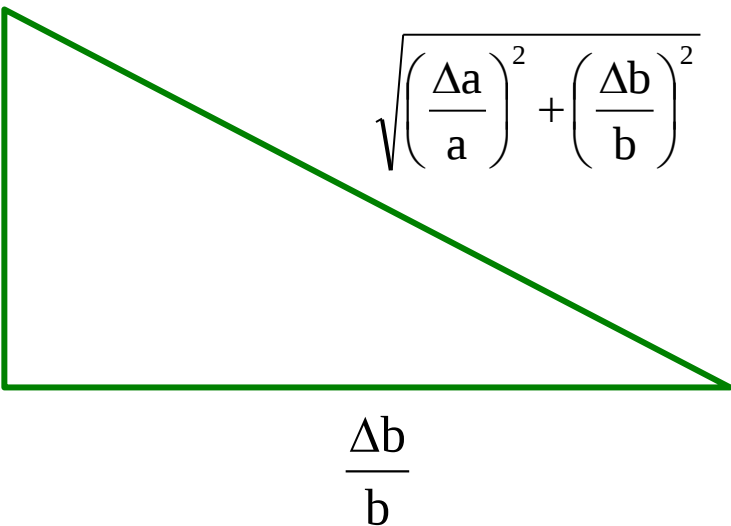
Si usa invece

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta a}{a} \oplus \frac{\Delta b}{b}$$

Si chiama “composizione” degli errori

Che significa il segno + dentro il cerchietto?

$$\frac{\Delta a}{a} \oplus \frac{\Delta b}{b} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}$$



$$\frac{\Delta a}{a}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}$$

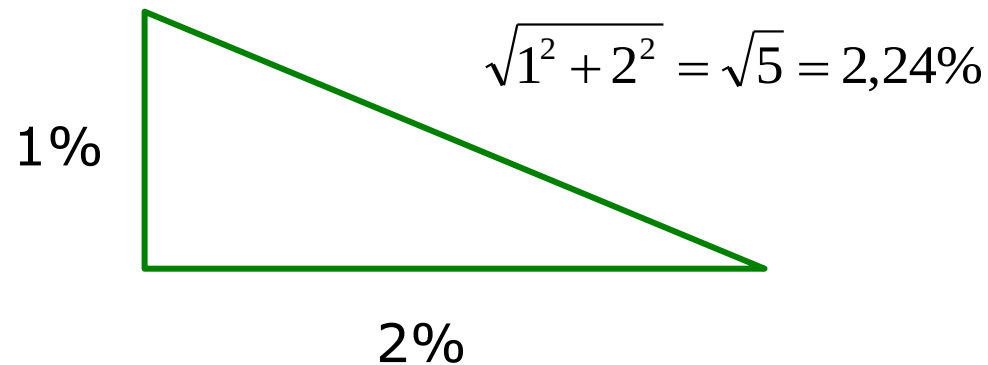
$$\frac{\Delta b}{b}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2} < \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

In sostanza, la somma lineare è pessimistica perché ci dà un errore maggiore

Nella composizione (quadratica) degli errori il contributo dominante è quello dell'errore maggiore

Se ad esempio $\Delta a/a = 1\%$ e $\Delta b/b = 2\%$ abbiamo dalla formula



Se però gli errori non sono indipendenti fra di loro, ma correlati, come per esempio calcolando il volume di un cubo di lato L , in cui misuriamo una sola volta un lato e poi applichiamo la formula $V = L^3$ allora usiamo la somma lineare

$$\frac{\Delta V}{V} = 3 \frac{\Delta L}{L}$$

$$s = \frac{1}{2} a t^2$$

Supponiamo che a e t siano misure indipendenti

Dobbiamo quindi usare la composizione degli errori

Scomponiamo la formula nelle sue parti

Errore relativo su $\frac{1}{2}$: è zero perché è un numero

Errore relativo su a : $\Delta a/a$

Errore relativo su t^2 : $\Delta t^2/t^2$

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{\Delta a}{a} \oplus \frac{\Delta t^2}{t^2}$$

misure indipendenti



Errore relativo su t^2

$$\frac{\Delta t^2}{t^2} = 2 \frac{\Delta t}{t}$$

alla fine quindi

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{\Delta a}{a} \oplus 2 \frac{\Delta t}{t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}$$

Queste formule per propagare gli errori relativi vanno bene non solo se abbiamo un prodotto ma anche se abbiamo dei rapporti

$$\rho = \frac{M}{V} \quad \rho' = \frac{M + \Delta M}{V - \Delta V} \quad \text{valore massimo}$$

$$\Delta\rho = \frac{M + \Delta M}{V - \Delta V} - \frac{M}{V}$$

$$\Delta\rho = \frac{M + \Delta M}{V - \Delta V} - \frac{M}{V}$$

$$\Delta\rho = \frac{M(1 + \Delta M / M)}{V(1 - \Delta V / V)} - \frac{M}{V} = \frac{M}{V} \cdot \left(\frac{1 + \Delta M / M}{1 - \Delta V / V} - 1 \right)$$

$$\frac{1 + \Delta M / M}{1 - \Delta V / V} \approx \left(1 + \frac{\Delta M}{M}\right)\left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right) \approx 1 + \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta V}{V}$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta V}{V}$$

Se M e V vengono da misure indipendenti
dovremmo combinare gli errori quadraticamente

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta M}{M} \oplus \frac{\Delta V}{V}$$