

FISICA GENERALE I

Docente: Prof. G. Carboni
giovanni.carboni@cern.ch

Esercitatore: Dott. R. Petrillo
roberto.petrillo@roma2.infn.it

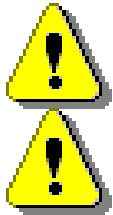
Anno Accademico 2012- 2013

Queste lezioni sono scaricabili in formato pdf
dalla pagina

<http://people.roma2.infn.it/carboni>

UTENTE: fis1_studenti
PW: disp_fis1

➔ *Necessario Adobe Reader*



Punto materiale		Corpo rigido in rotazione
m	$\leftrightarrow$	I
v	$\leftrightarrow$	ω
$p=mv$	$\leftrightarrow$	$L=I\omega$
$\frac{1}{2}mv^2$	$\leftrightarrow$	$\frac{1}{2}I\omega^2$
$F=ma$	$\leftrightarrow$	$K=I\alpha$

Calcolare il momento d'inerzia

Per definizione è additivo (è una somma)

Dipende dall'asse di rotazione

E' semplicissimo da calcolare per sistemi formati da poche particelle, ad esempio per le molecole

Per una singola massa m che ruota a distanza r dall'asse

$$I = mr^2$$

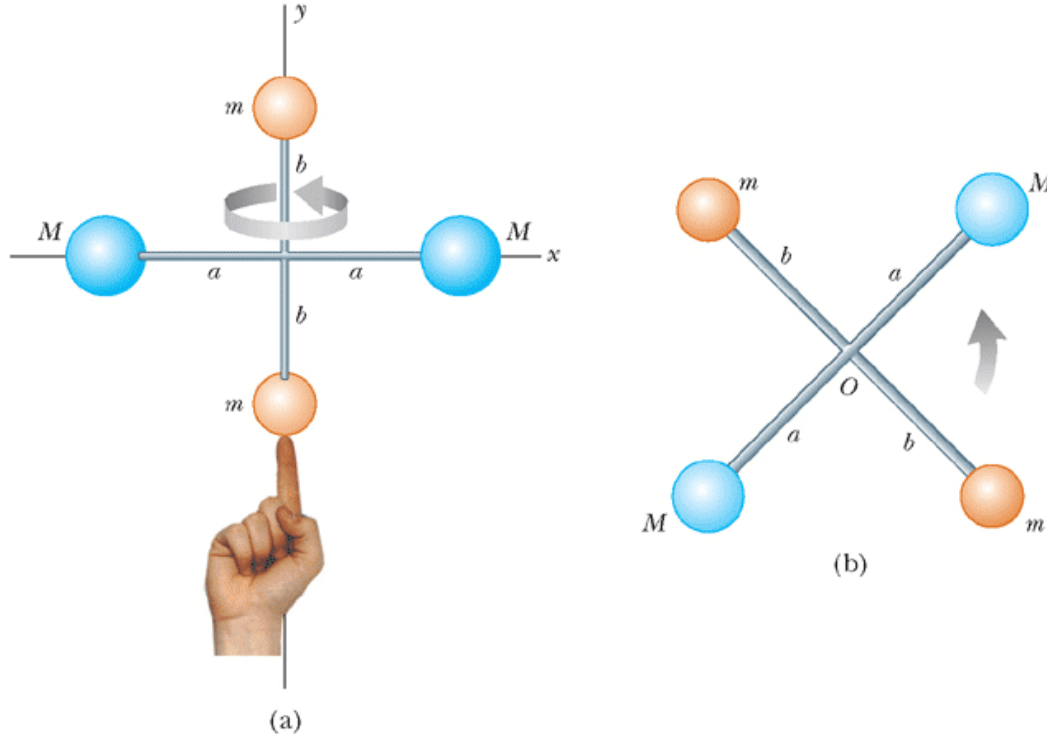


FIGURA 10.7

(Esempio 10.3) Quattro sfere formano un inusuale bastone. (a) Il bastone ruota attorno all'asse y . (b) Il bastone ruota attorno all'asse z .

$$I_y = 2Ma^2$$

(le 2 sfere sull'asse
non contribuiscono)

$$I_z = 2Ma^2 + 2mb^2$$

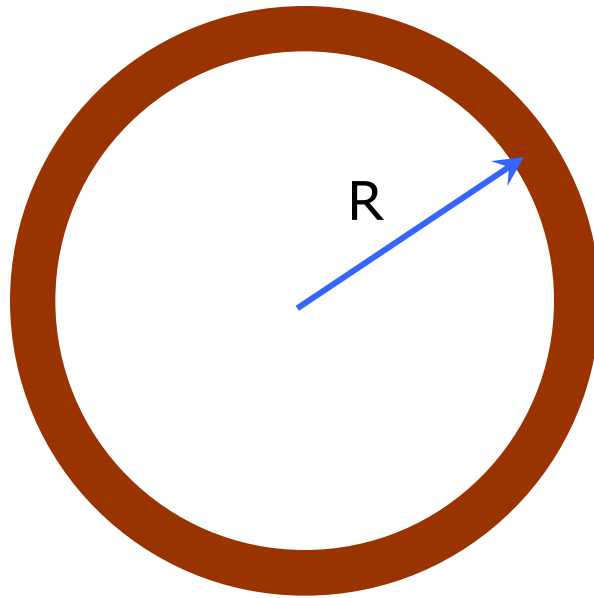
(tutte le sfere contribuiscono)

Per corpi estesi si devono sostituire le somme con integrali

$$I_z = \sum_1^N m_i r_i^2 \rightarrow \int dm r^2$$

Ruota sottile di raggio R

Se si può trascurare lo spessore radiale della ruota allora tutte le masse costituenti hanno $r=R$



$$I_z = \sum_1^N m_i r_i^2 \approx \left(\sum_1^N m_i \right) R^2 = MR^2$$

Cilindro pieno

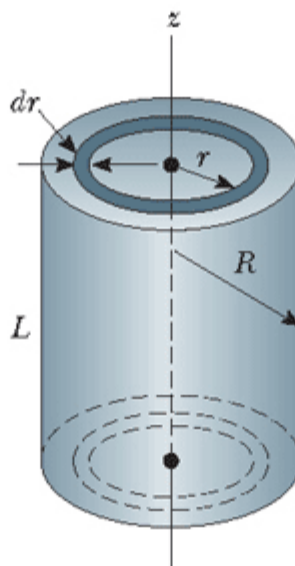
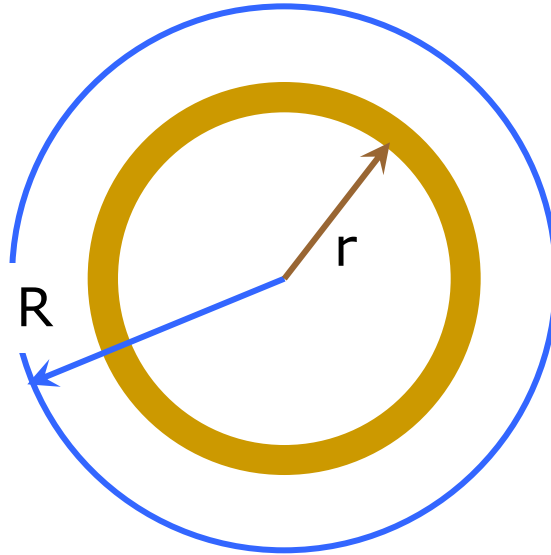


FIGURA 10.8

(Esempio 10.4) La geometria per calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse centrale di un cilindro pieno uniforme.

La massa fra r e $r+dr$ è data dalla densità per il volume

Volume: area di base x altezza h



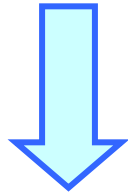
$$\text{Area di base} = dA = 2\pi r dr$$

$$\text{massa} = dm = \rho h 2\pi r dr$$

$$dI = dm r^2 = \rho h 2\pi r^3 dr \quad \leftarrow \text{vedi ruota sottile}$$

$$I = \rho h 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{2} \rho h R^4$$

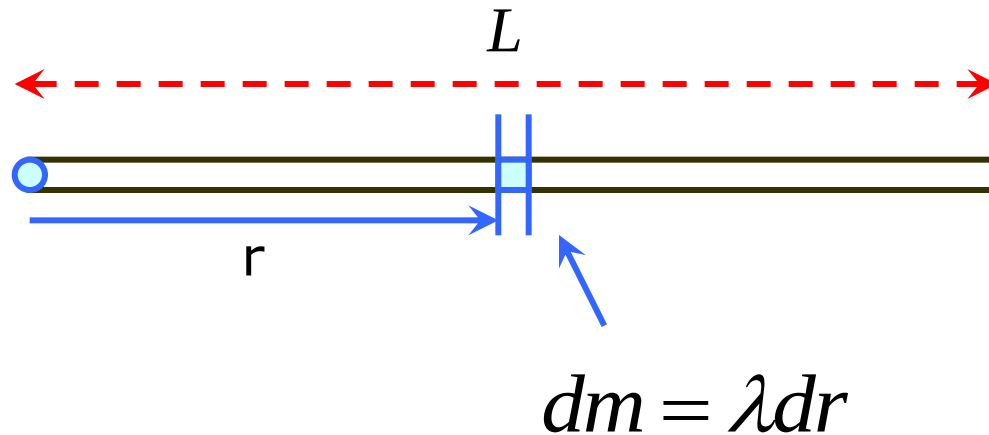
$$M = \rho h \pi R^2$$



$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

cilindro o disco pieno

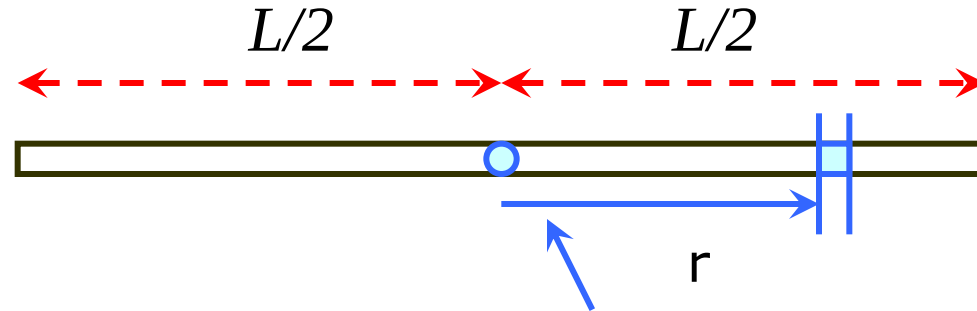
Asta sottile, rispetto a un estremo



$$dI = dm r^2 = \lambda r^2 dr$$

$$I = \lambda \int_0^L r^2 dr = \frac{1}{3} \lambda L^3 = \frac{1}{3} ML^2$$

Asta sottile, rispetto al centro

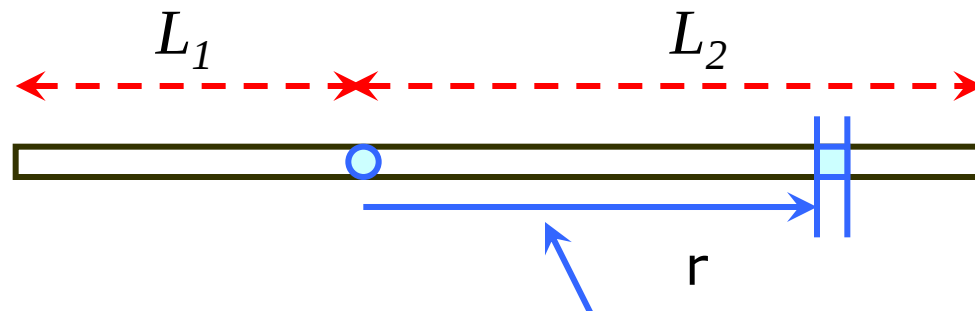


$$dm = \lambda dr$$

$$dI = dm r^2 = \lambda r^2 dr$$

$$I = \lambda \int_{-L/2}^{L/2} r^2 dr = \frac{2}{3} \lambda \left(\frac{L}{2} \right)^3 = \frac{1}{12} ML^2$$

Asta sottile, rispetto a un asse arbitrario



$$L_1 + L_2 = L$$

Invece di fare l'integrale la trattiamo come 2 aste di lunghezza L_1 L_2 con asse a un estremo

$$I = \frac{1}{3} m_1 L_1^2 + \frac{1}{3} m_2 L_2^2 \quad m_1 = M \frac{L_1}{L} \quad m_2 = M \frac{L_2}{L}$$

$$I = \frac{1}{3} \frac{M}{L} (L_1^3 + L_2^3)$$

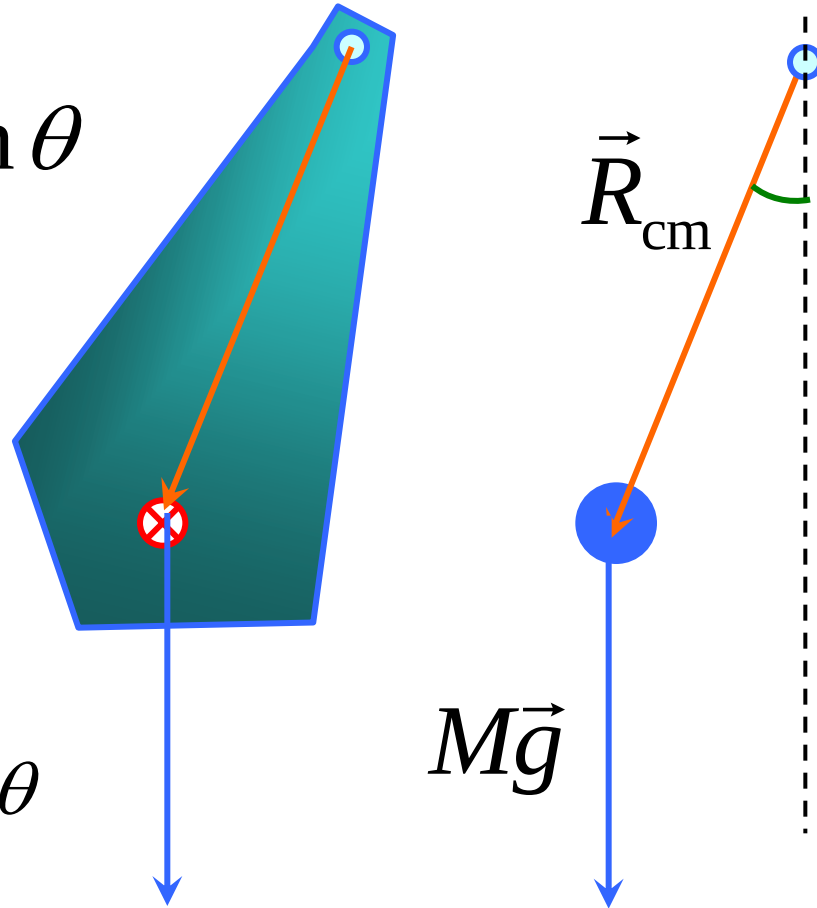
Dinamica del corpo rigido

Pendolo fisico

↖ un generico corpo pesante che ruota attorno a un asse fisso

$$K_z = -R_{\text{cm}} Mg \sin \theta$$

$$I_z \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -R_{\text{cm}} Mg \sin \theta$$



$$I_z \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -R_{\text{cm}} Mg \sin \theta$$

è l'equazione del pendolo "matematico"

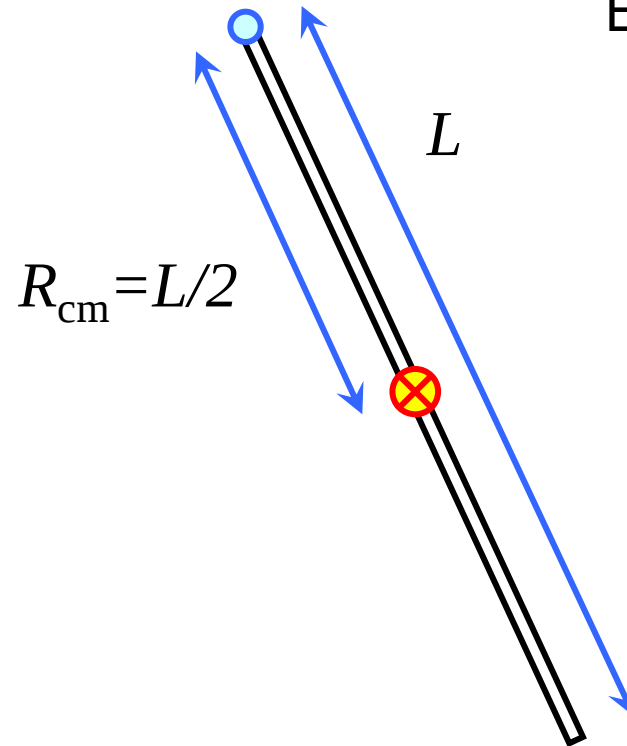
Come in quel caso faremo l'approssimazione di piccoli angoli $\sin \theta \approx \theta$

 $I_z \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -R_{\text{cm}} Mg \theta$

Equazione dell'oscillatore armonico con

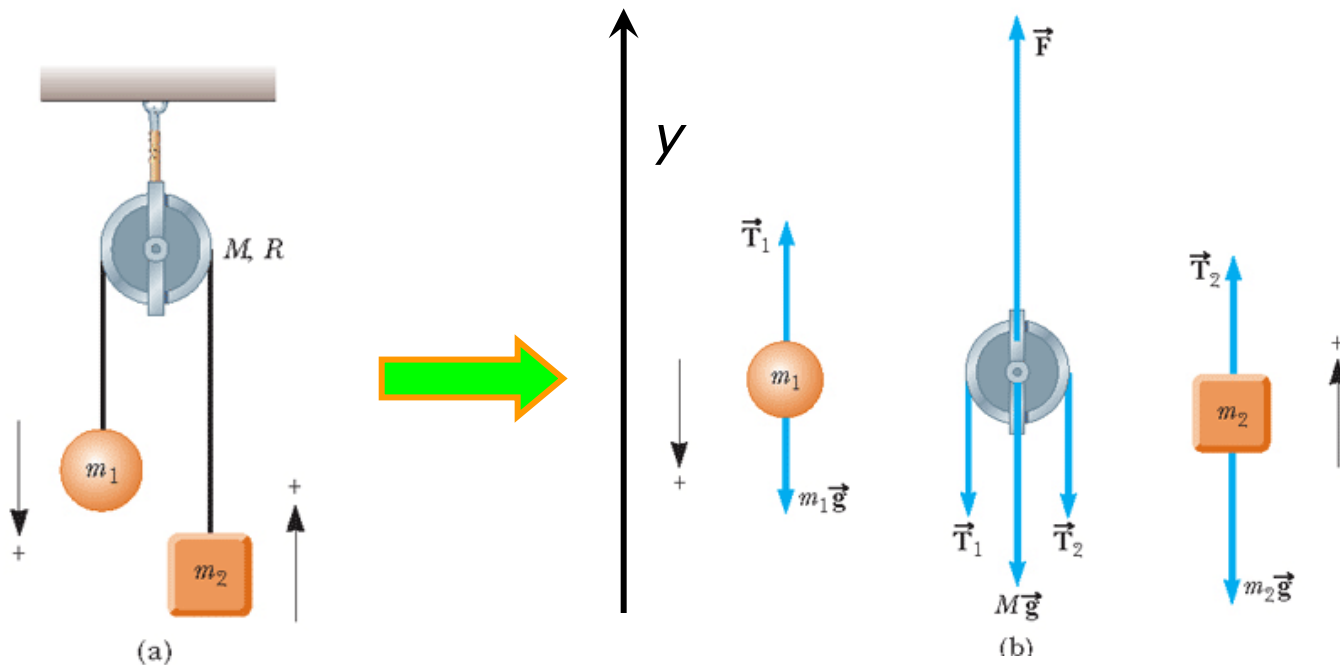
$$\omega = \sqrt{\frac{R_{\text{cm}} Mg}{I_z}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{R_{\text{cm}} Mg}}$$

Esempio: pendolo ad asta



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{R_{\text{cm}} M g}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} M L^2}{\frac{1}{2} L M g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

La macchina di Atwood con carrucola massiccia



$$m_1 a_1 = T_1 - m_1 g$$

$$m_2 a_2 = T_2 - m_2 g$$

$$a_1 = -a_2 = -a$$

$$m_1 a = m_1 g - T_1$$

$$m_2 a = T_2 - m_2 g$$

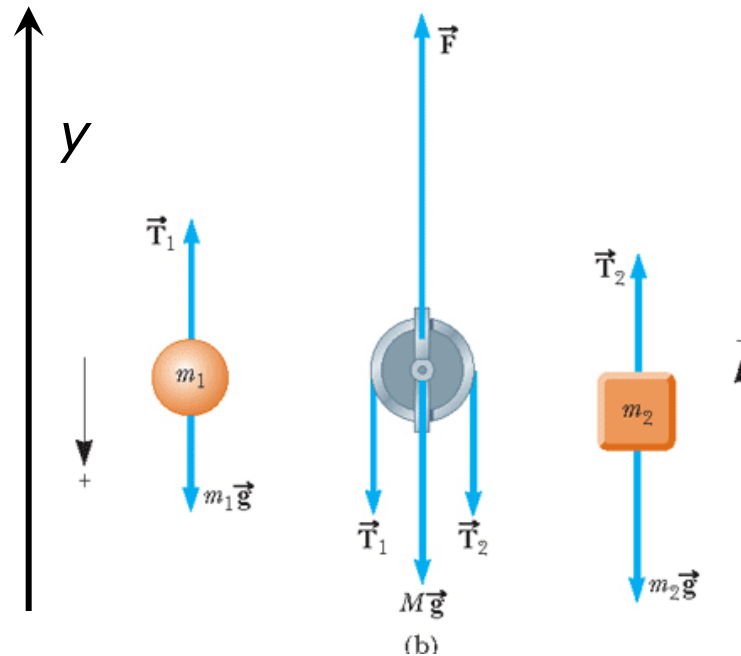
Con questa scelta di a
la carrucola gira in senso
antiorario per $a > 0$

Momento delle forze
sulla carrucola

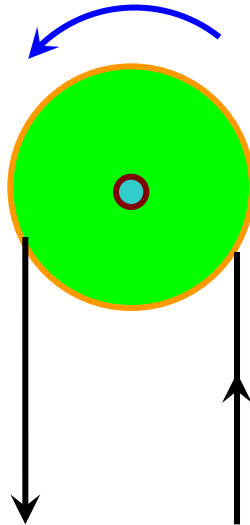
$$K = (T_1 - T_2)R$$



$$I \frac{d\omega}{dt} = (T_1 - T_2)R$$



$$\omega > 0$$



$$v > 0$$

$$v = \omega R$$

$$a = \frac{d\omega}{dt} R$$

$$2\pi \cdot R = vT$$



*lunghezza di corda avvolta
nel periodo = circonferenza*

$$m_1 a = m_1 g - T_1$$

$$m_2 a = T_2 - m_2 g$$



$$(m_1 + m_2) a = (m_1 - m_2) g + T_2 - T_1$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = (T_1 - T_2) R$$

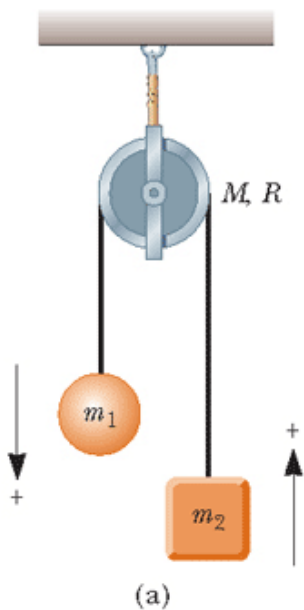


$$\frac{I a}{R^2} = T_1 - T_2$$

$$(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}) a = (m_1 - m_2) g$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} g$$

Energia



L'energia cinetica vale

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)v^2$$

Se m_2 sale di h m_1 scende di h
o viceversa l'energia potenziale
cambia di

$$U = (m_2 - m_1)gh$$

se ad esempio lasciamo andare il sistema da fermo
fino a che m_2 sale o scende di h possiamo trovare la velocità

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2})v^{*2} = (m_1 - m_2)gh$$

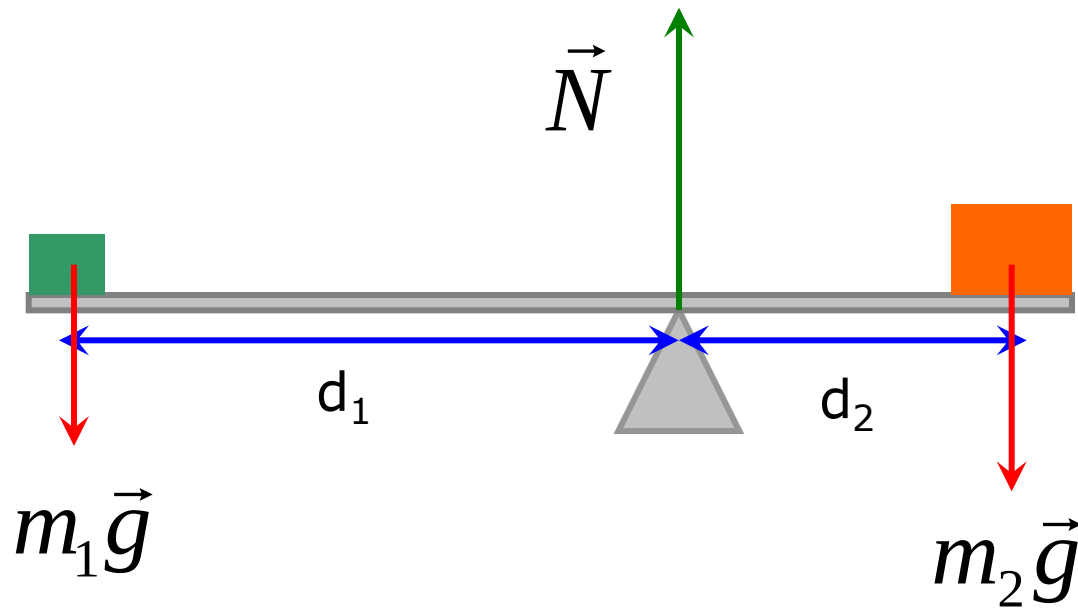
notare che se $m_2 > m_1$ $h < 0$ (m_2 scende m_1 sale) quindi $v^{*2} > 0$.

Statica del corpo rigido

La I e la II equazione cardinale permettono di definire le condizioni di equilibrio statico di un corpo rigido

- la risultante di tutte le esterne forze (incluse le reazioni vincolari) dev'essere nulla
- il momento risultante di tutte le forze esterne (incluse le reazioni vincolari) dev'essere nullo

Per la prima condizione basta che il momento sia nullo rispetto a un polo qualunque (quello che ci fa più comodo per i calcoli, vedere lezione 19)

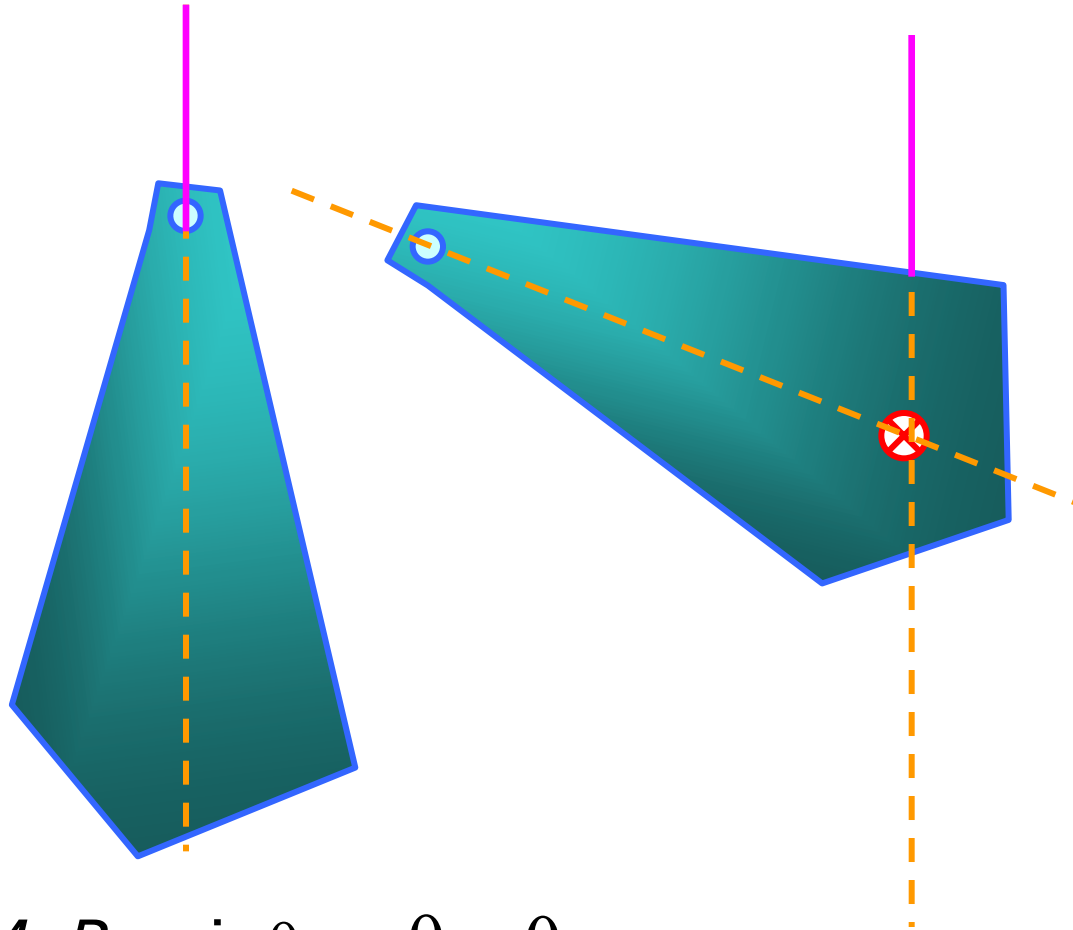


$$\vec{N} = -(m_1 + m_2)\vec{g}$$

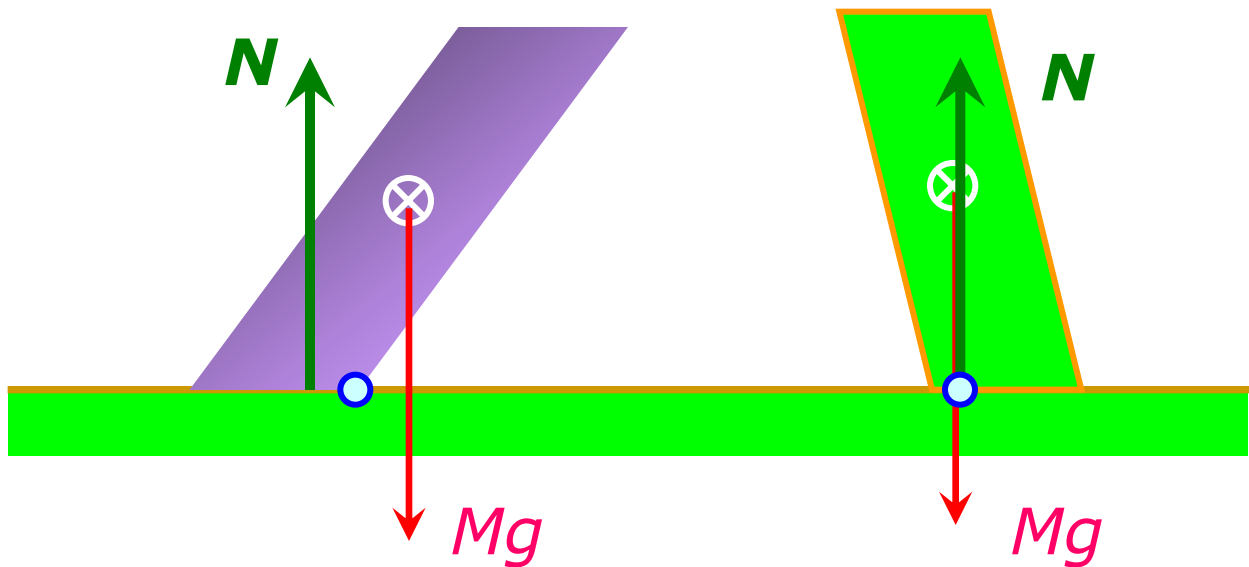
$$K_{\text{tot}} = 0 \Rightarrow m_1 d_1 g = m_2 d_2 g$$

Trovare il baricentro

Il CM si trova sulla verticale del punto di sospensione



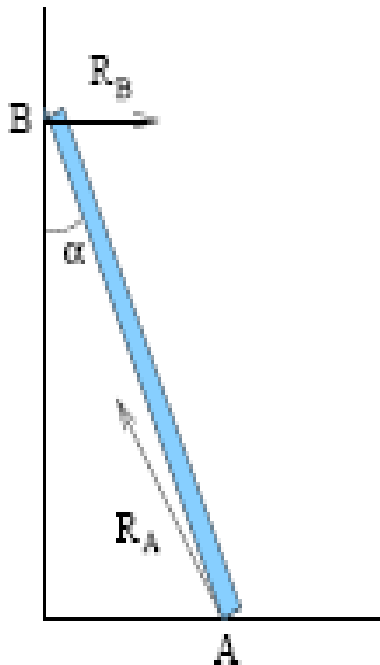
infatti $K = MgR_{\text{cm}} \sin \theta \Rightarrow \theta = 0$



K è sempre < 0
dovunque sia applicata
 N

K è $= 0$, **N** è
applicata sulla verticale

Equilibrio di una scala appoggiata al muro



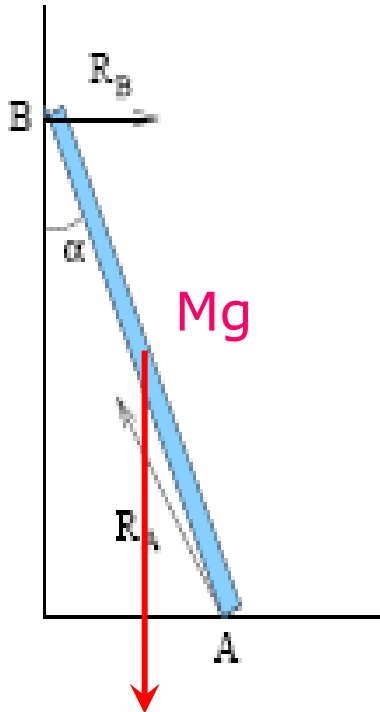
Equilibrio: occorre attrito sul pavimento ($R_{Ax} < 0$)

$$-Mg + R_{Ay} = 0$$

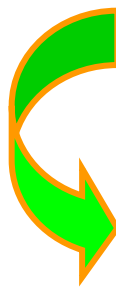
$$R_{Bx} + R_{Ax} = 0$$

Calcoliamo il momento delle forze rispetto a un asse passante per A

Calcoliamo il momento delle forze
rispetto a un asse passante per A



$$K = Mg \frac{L}{2} \sin \alpha - R_B L \cos \alpha = 0$$


$$R_B = \frac{Mg}{2} \tan \alpha$$

$$R_{Ax} = -\frac{Mg}{2} \tan \alpha$$

La condizione sull'attrito statico è che

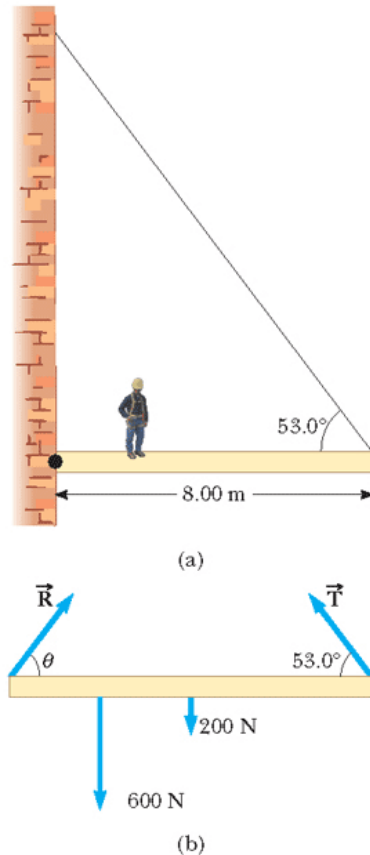
$$|R_{Ax}| \leq \mu_s |R_{Ay}|$$

$$\frac{Mg}{2} \tan \alpha \leq \mu_s Mg$$

$$\tan \alpha \leq 2\mu_s$$

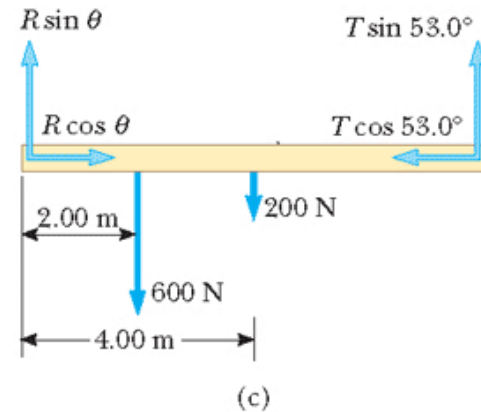
$$\alpha \leq 63,4^\circ$$

Equilibrio di una trave sospesa I



$$T \cos 53^\circ = R \cos \theta$$

$$T \sin 53^\circ + R \sin \theta = 800 \text{ N}$$



$$K = -2 \cdot 600 - 4 \cdot 200 + T \sin 53^\circ \cdot 8 = 0$$

$$T = \frac{2000}{8 \cdot \sin 53^\circ} = 313 \text{ N}$$

Equilibrio di una trave sospesa II

$$R \cos \theta = 188 \text{ N}$$

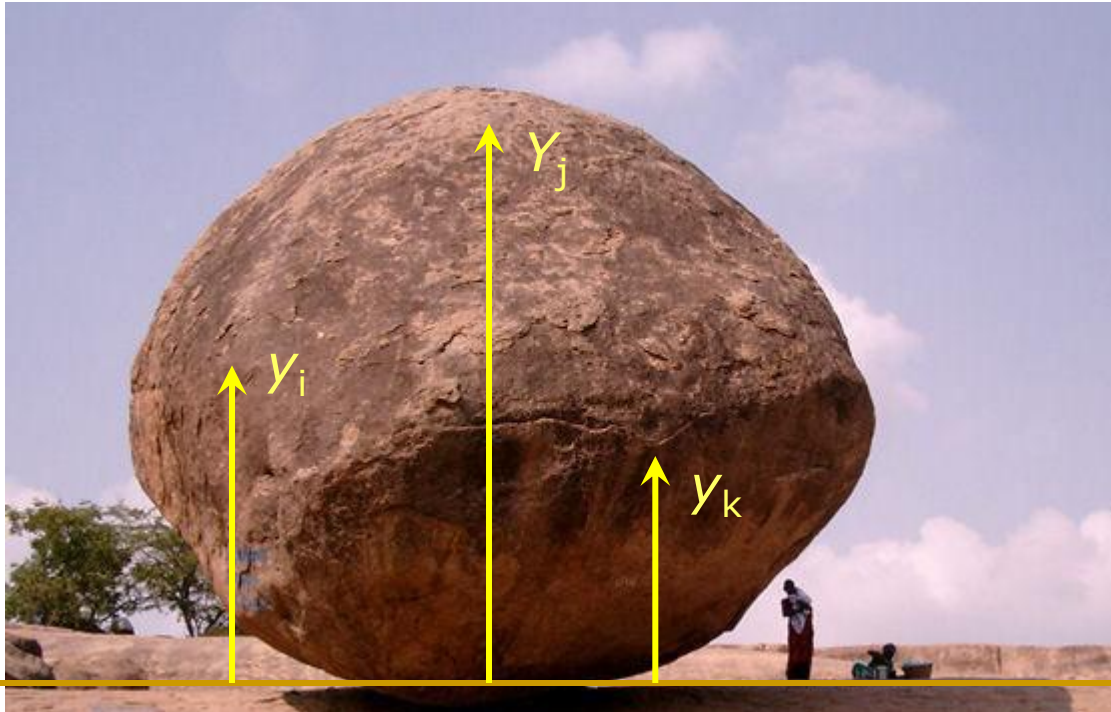
$$R \sin \theta = 550 \text{ N}$$

$$\Rightarrow \theta = 71,1^\circ$$

$$\Rightarrow R = 581 \text{ N}$$

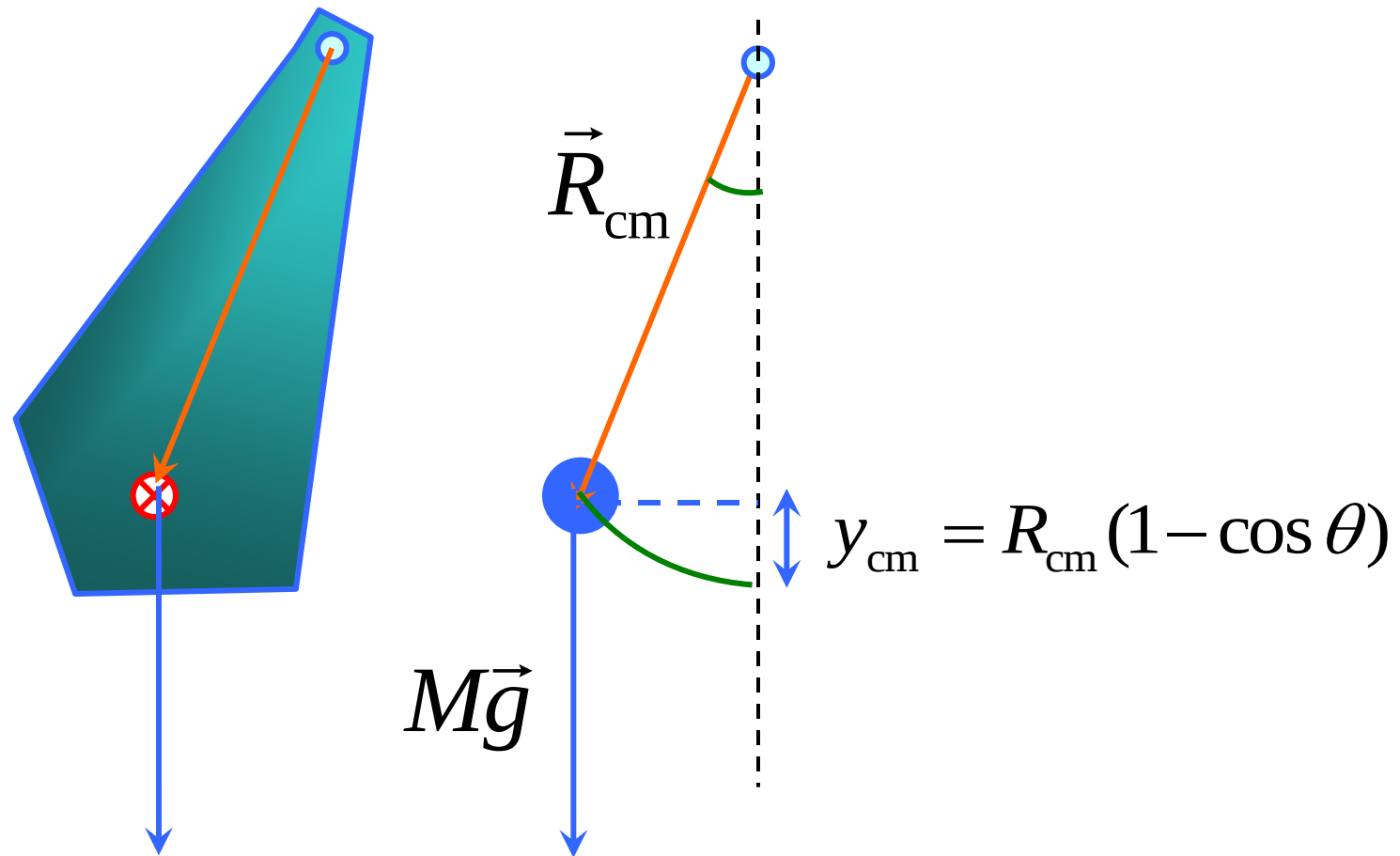
➔ *verificare*

Energia potenziale di un corpo pesante



$$U = \sum_1^N m_i y_i g = M \frac{\sum_1^N m_i y_i}{M} g = M g y_{\text{cm}}$$

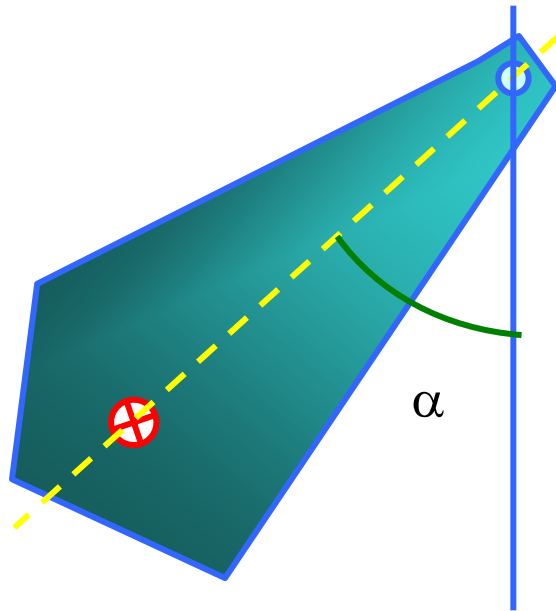
Quindi anche qui possiamo trattare il corpo come un punto materiale di massa M situato nel baricentro



Energia del pendolo

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 + MgR_{\text{cm}} (1 - \cos \theta)$$

Esempio: pendolo lasciato andare da un angolo α

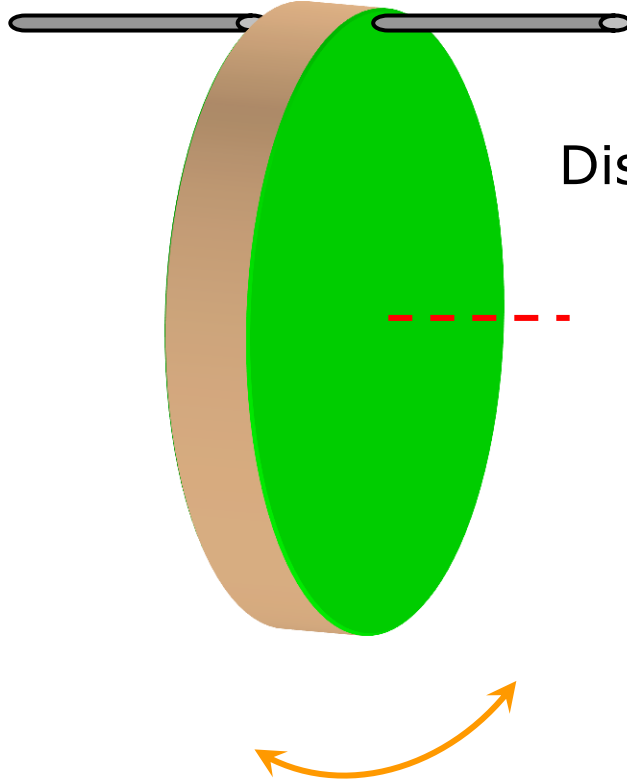


Trovare la velocità angolare quando il CM passa per la verticale

$$\omega = \sqrt{\frac{2MgR_{\text{cm}}}{I} (1 - \cos \alpha)}$$

Teorema di Huygens-Steiner

o degli assi paralleli



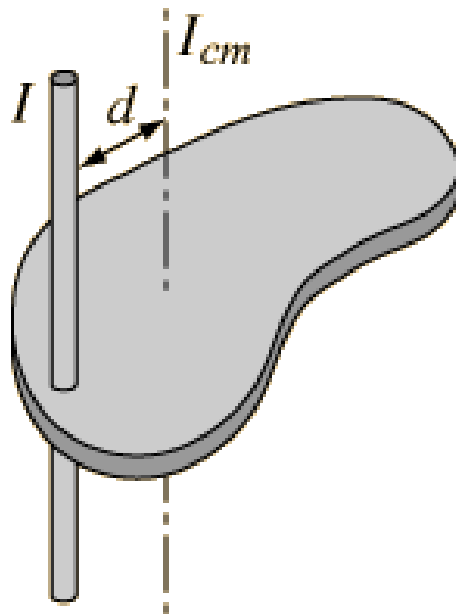
Disco di raggio R appeso sul bordo

$$I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}MR^2$$

$$I_{\text{bordo}} = ?$$

Teorema di Huygens-Steiner

o degli assi paralleli



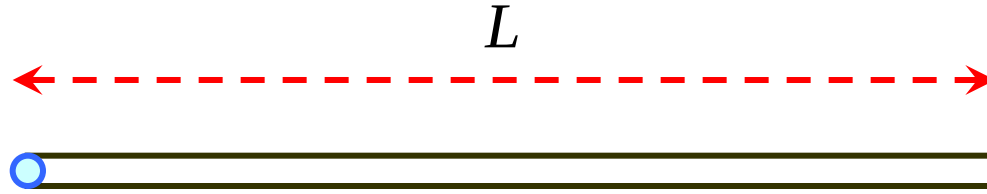
$$I = I_{cm} + Md^2$$

trovo questo

noto questo

Asta sottile

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$



$$I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} ML^2$$

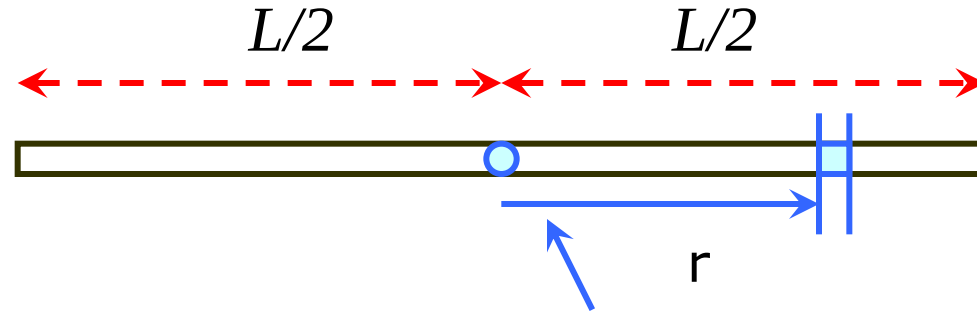


Huygens-Steiner

$$d = L + R$$

$$I = M \left(\frac{L}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} ML^2$$

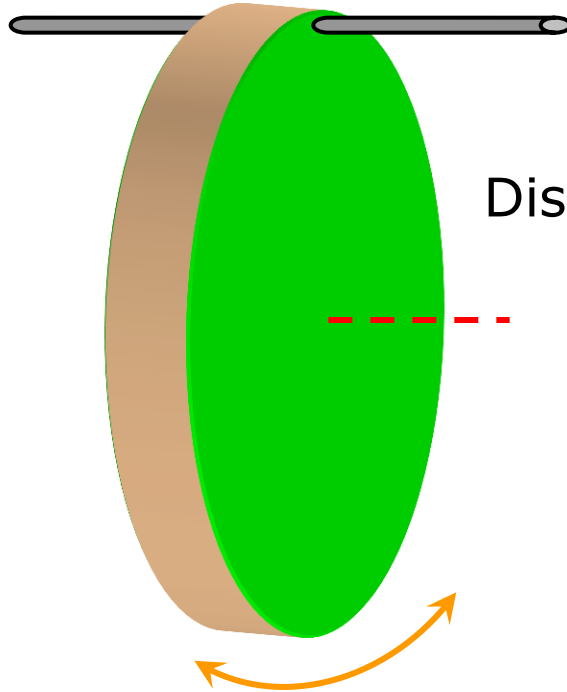
Asta sottile, rispetto al centro



$$dm = \lambda dr$$

$$dI = dm r^2 = \lambda r^2 dr$$

$$I = \lambda \int_{-L/2}^{L/2} r^2 dr = \frac{2}{3} \lambda \left(\frac{L}{2} \right)^3 = \frac{1}{12} ML^2$$

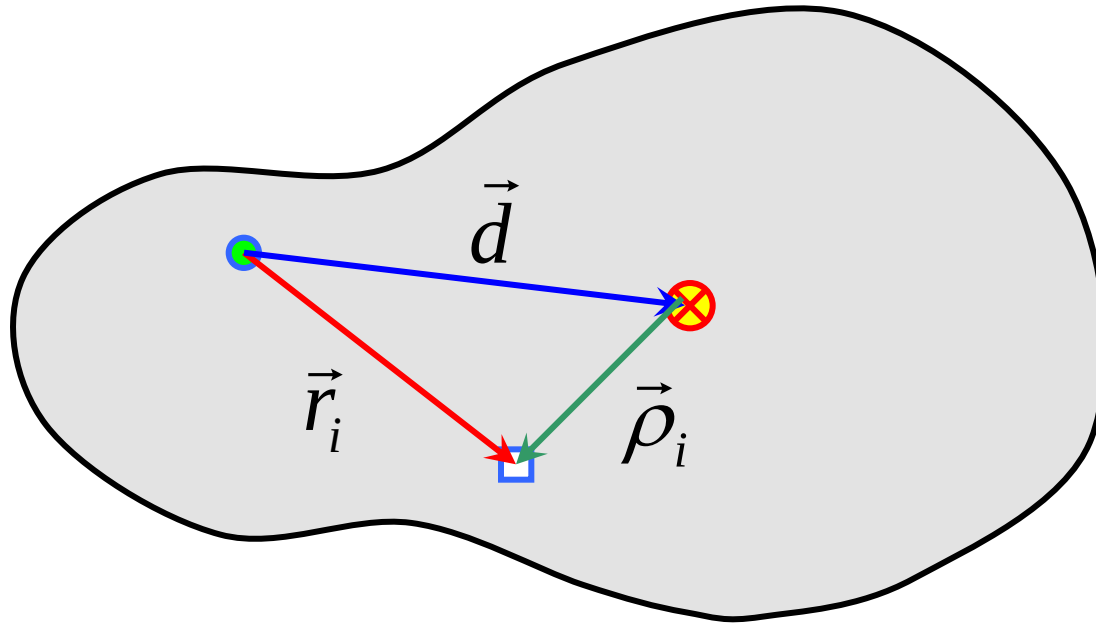


Disco di raggio R appeso sul bordo

$$R_{\text{cm}} = R$$

$$I = I_{\text{cm}} + MR^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

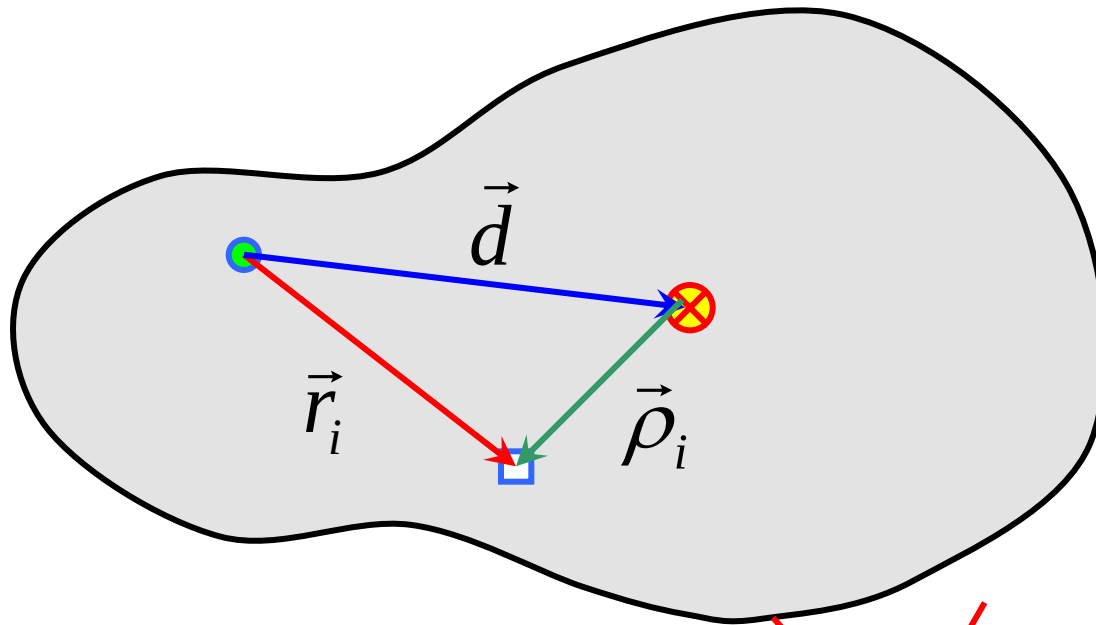
$$\vec{d} + \vec{\rho}_i = \vec{r}_i \qquad d^2 + \rho_i^2 + 2\vec{d} \cdot \vec{\rho}_i = r_i^2$$



$$I = \sum_1^N m_i r_i^2 = \sum_1^N m_i \rho_i^2 + \sum_1^N m_i d^2 + 2 \sum_1^N m_i \vec{\rho}_i \cdot \vec{d}$$

$$\vec{d} + \vec{\rho}_i = \vec{r}_i$$

$$d^2 + \rho_i^2 + 2\vec{d} \cdot \vec{\rho}_i = r_i^2$$



$$I = I_{\text{cm}} + Md^2 + 2 \sum_1^N m_i \vec{\rho}_i \cdot \vec{d}$$

Il teorema di Huygens-Steiner

$$I = I_{\text{cm}} + Md^2$$

ci dice anche che il minimo momento d'inerzia si ha nella rotazione intorno a un asse **baricentrale**

Per qualsiasi altro asse parallelo si aggiunge un termine > 0
 Md^2

Per esempio, a parità di ω si minimizza l'energia di rotazione ruotando attorno al baricentro

asta lunga L
di massa m

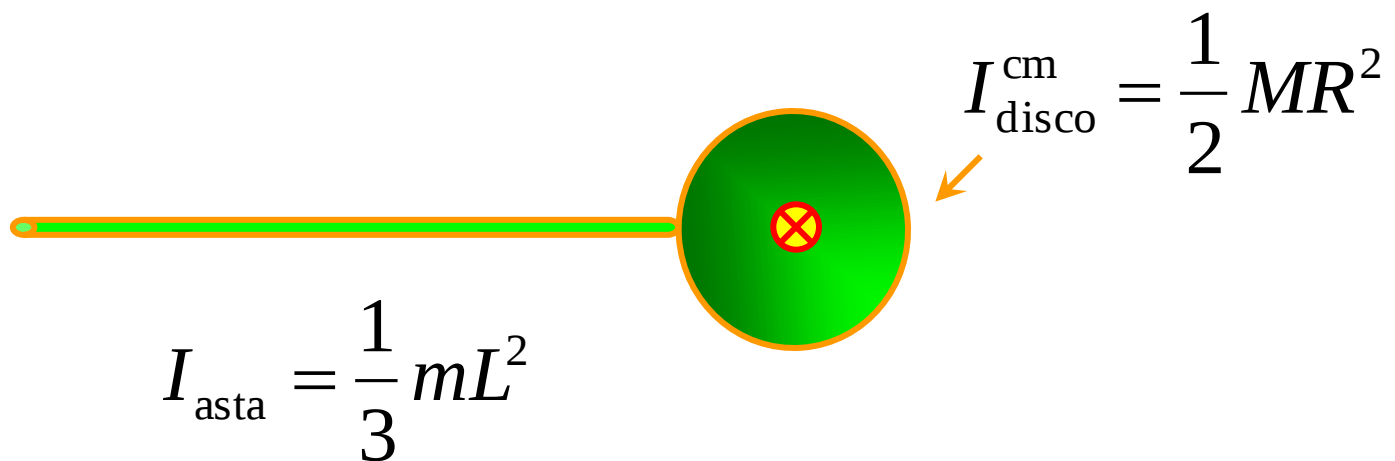
$$I_{\text{asta}} = \frac{1}{3} mL^2$$

disco raggio R
di massa M

$$d = L + R$$

$$I_{\text{disco}} = \frac{1}{2} MR^2 + M(L + R)^2$$

H-S

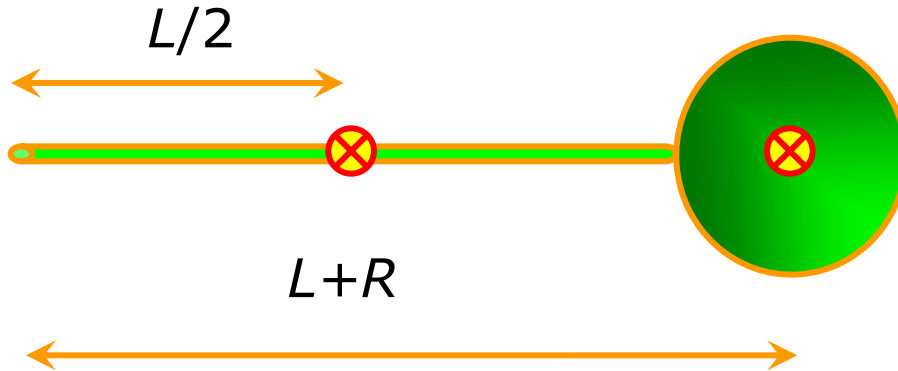


$$I_{\text{disco}} = \frac{1}{2}MR^2 + M(L + R)^2 = M\left(L^2 + \frac{3}{2}R^2 + 2LR\right)$$

Huygens-Steiner

$$I = I_{\text{disco}} + I_{\text{asta}}$$

Appendice



$$R_{\text{cm}} = \frac{m \frac{L}{2} + M(L + R)}{m + M}$$

Usiamo la proprietà che il CM è il CM dei CM

Energia del pendolo per piccole oscillazioni

Per piccoli angoli $1 - \cos \theta \approx \frac{1}{2} \theta^2$ (vedi lezione sul pendolo)

$$E = \frac{1}{2} I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} Mg R_{\text{cm}} \theta^2$$

che è l'energia di un oscillatore armonico con

$$k = Mg R_{\text{cm}} \quad m = I$$


$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{R_{\text{cm}} Mg}}$$

asta 1 lunga L
di massa M

$$I_1 = \frac{1}{3} ML^2$$

asta 2 lunga l
di massa m

$$I_2^{\text{cm}} = \frac{1}{12} ml^2$$

$$R_{\text{cm}} = \frac{M \frac{L}{2} + mL}{m + M}$$

$$I_2 = \frac{1}{12} ml^2 + mL^2$$

Huygens-Steiner

asta 1 lunga L
di massa M

asta 2 lunga l
di massa m



$$R_{\text{cm}} = \sqrt{X_{\text{cm}}^2 + Y_{\text{cm}}^2}$$

$$X_{\text{cm}} = \frac{M \frac{L}{2} + mL}{m + M}$$
$$Y_{\text{cm}} = \frac{m \frac{l}{2}}{m + M}$$

