

FISICA GENERALE I

Docente: Prof. G. Carboni
giovanni.carboni@cern.ch

Esercitatore: Dott. R. Petrillo
roberto.petrillo@roma2.infn.it

Anno Accademico 2012 - 2013

Queste lezioni sono scaricabili in formato pdf
dalla pagina

<http://people.roma2.infn.it/carboni>

UTENTE: fis1_studenti
PW: disp_fis1

→ *Necessario Adobe Reader*

Moto vario

E' l'alternativa al moto uniforme

Per esempio quello che abbiamo visto descritto dall'orario ferroviario non era un moto uniforme perché la velocità media sui vari intervalli di tempo non era costante

Un corpo che

- si mette in movimento da fermo
- è in movimento e si arresta

fa un **moto vario**

Velocità

Abbiamo parlato finora di velocità media su un intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$

Convenzione: $t_2 > t_1$, $\Delta t > 0$

Adesso scriviamo $t_2 = t_1 + \Delta t$

L'intervallo Δt è completamente arbitrario. Consideriamo intervalli sempre più piccoli.

Allora $t_2 \approx t_1$ dove " $\approx$ " significa molto simile

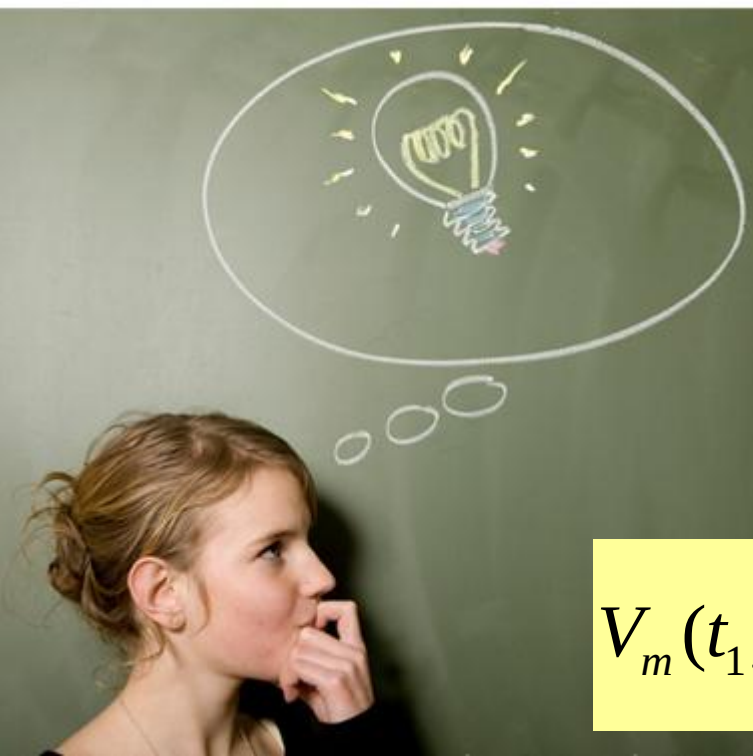
Calcoliamo la velocità media su intervalli sempre più piccoli (teniamo t_1 fisso)

$$V_m(t_1, t_1 + \Delta t) = \frac{s(t_1 + \Delta t) - s(t_1)}{\Delta t} \quad \Delta t \rightarrow 0$$



Limite a zero

Se il denominatore va a zero non è che il rapporto diventa infinito???



Anche il numeratore diventa sempre più piccolo perché se $\Delta t \rightarrow 0$ il punto si sposta sempre meno

$$V_m(t_1, t_1 + \Delta t) = \frac{s(t_1 + \Delta t) - s(t_1)}{\Delta t} \quad \Delta t \rightarrow 0$$

Questo fa sì che il rapporto si mantenga finito anche se il denominatore va a zero

$$V_m(t_1, t_1 + \Delta t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \Delta t \rightarrow 0$$

$$V_m(t_1, t_1 + \Delta t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \Delta t \rightarrow 0$$

t_1 e t_2 sono quasi uguali
tanto vale chiamarli t_1 entrambi,
anzi, t

*è la derivata di
 s rispetto a t*

E questa è la
**Velocità
Istantanea**
all'istante t

$$v(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$





$$v(t) \underset{\Delta t \rightarrow 0}{=} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

$d \equiv \text{differenziale}$

La **Velocità Istantanea** non è altro che la derivata rispetto al tempo della legge oraria $s(t)$

Per fare subito un controllo prendiamo il moto uniforme in cui la velocità media e quella istantanea coincidono

Esempio del Moto Uniforme

$$s(t) = s_0 + V_0 t$$

Calcoliamo la derivata rispetto al tempo

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{d(s_0 + V_0 t)}{dt}$$

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \cancel{\frac{ds_0}{dt}} + \frac{d(V_0 t)}{dt}$$

La derivata di una costante è zero

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{d(V_0 t)}{dt}$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = V_0 \frac{dt}{dt} = V_0$$

$$v(t) = V_0 \quad \text{c.d.d.}$$

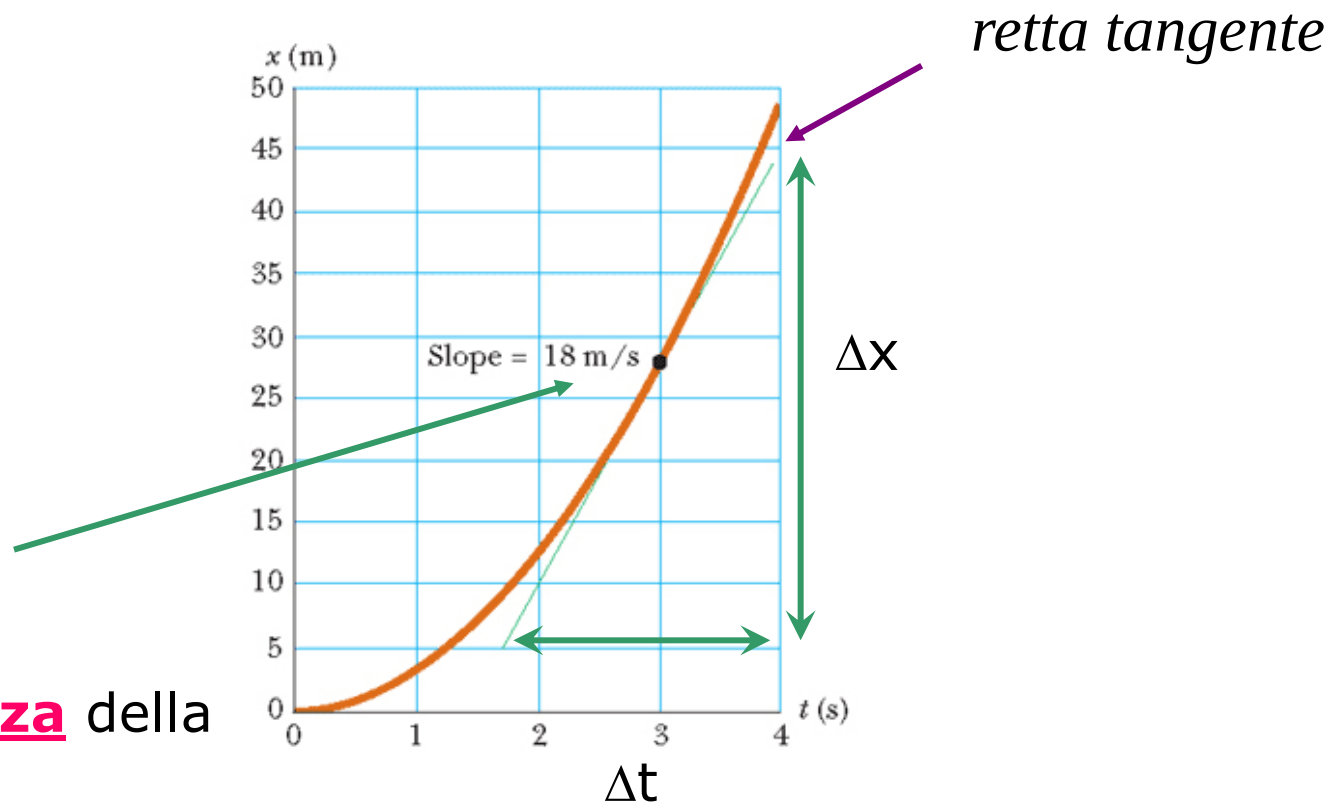
Possiamo applicare la regola a qualunque legge oraria sotto forma analitica e calcolarci la velocità in ogni istante

$$s(t) = A + Bt - Ct^2 + Dt^3$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = B - 2Ct + 3Dt^2$$

Tutto molto semplice

Interpretazione grafica della derivata



$$v = \frac{dx}{dt} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)_{\text{tang}} \approx \frac{40 \text{ m}}{2,2 \text{ s}} = 18 \text{ m/s}$$

Interpretazione grafica della derivata

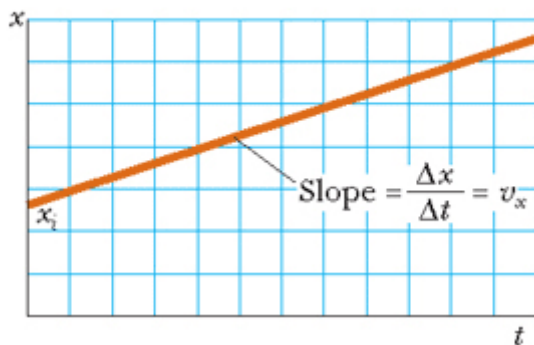


FIGURA 2.6 Grafico posizione-tempo per una particella con velocità costante. Il valore della velocità costante è uguale alla pendenza della linea retta.

Nel moto uniforme la derivata è costante

La pendenza della curva è dappertutto la stessa

Interpretazione grafica della derivata

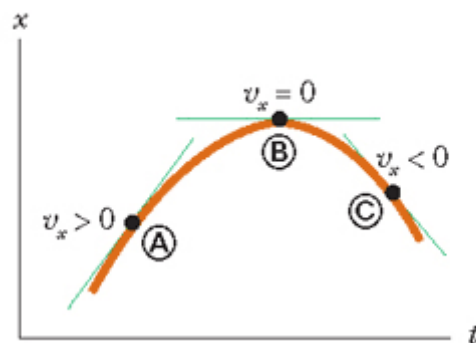
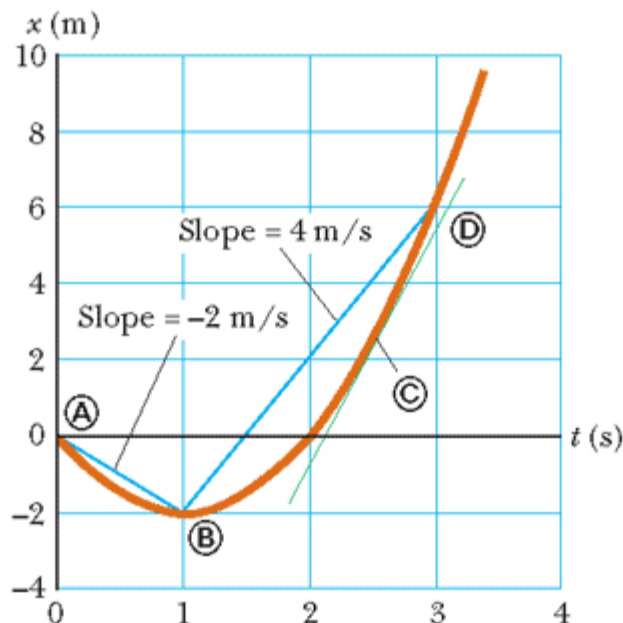


FIGURA 2.3 Nel grafico posizione-tempo mostrato, la velocità è positiva in (A), dove la pendenza della linea tangente è positiva; la velocità è zero in (B), dove la pendenza della tangente è zero; e la velocità è negativa in (C), dove la pendenza della tangente è negativa.

Interpretazione grafica della derivata



$$v = -4 + 4t \text{ m/s}$$

V aumenta col tempo

➔ Diciamo che il PM

accelera

FIGURA 2.5

(Esempio 2.4) Grafico posizione-tempo per una particella la cui coordinata x varia nel tempo come $x = -4t + 2t^2$.



Serway, Jewett
Principi di Fisica, IV Ed.
EdiSES

Velocità media e istantanea: non confonderle!

la velocità in **a,b,e** è positiva

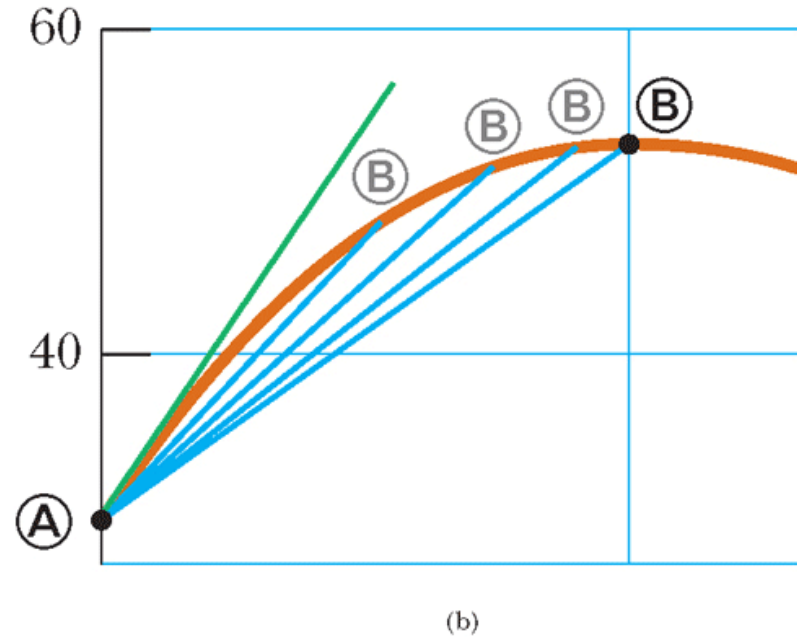
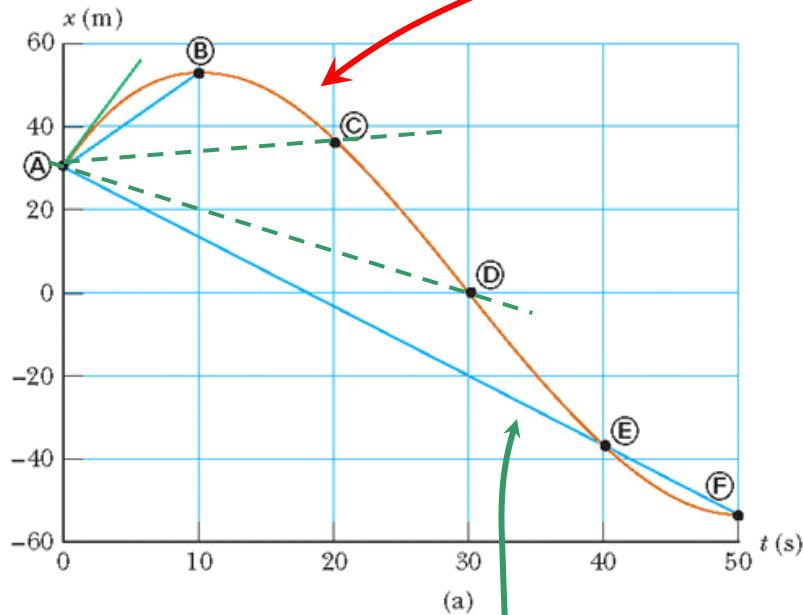


FIGURA 2.2

(a) Grafico posizione-tempo per il moto della macchina di Figura 2.1. (b) Un ingrandimento dell'angolo superiore sinistro del grafico di (a) mostra come la linea blu fra le posizioni ① e ② si avvicina alla linea verde tangente quando il punto ② si muove avvicinandosi al punto ①.

la velocità in **d,e,f** è negativa

L'accelerazione media

Se la velocità varia nel tempo diciamo che il corpo accelera (a volte usiamo il termine decelera)

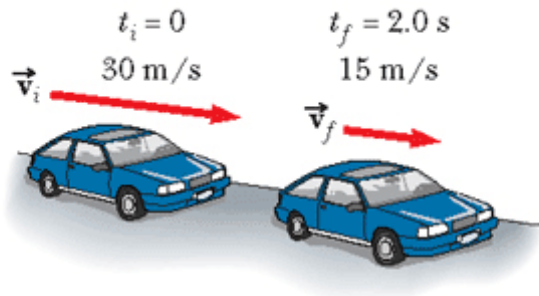


FIGURA 2.9 La velocità dell'auto diminuisce da 30 m/s a 15 m/s in un intervallo di tempo di 2.0 s .

Accelerazione media fra t_1 e t_2

$$a_m(t_1, t_2) = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$a_m(t_i, t_f) = \frac{(15 - 30) \text{ m/s}}{2 \text{ s}} = -7,5 \text{ m/s}^2$$

Nota: dato che è un rapporto fra velocità e tempo

$$\rightarrow [a] = [v][T]^{-1} = [L][T]^{-2}$$

$\rightarrow$ si misura in m/s^2

Esempio 2: auto che parte da ferma e raggiunge 100 km/h in 10 s. Calcolare l'accelerazione media

$$t_1 = 0 \text{ s}, t_2 = 10 \text{ s}$$

$$v_1 = 0 \text{ m/s}, v_2 = 100 \text{ m/3600 s} = 27,8 \text{ m/s}$$



$$a_m = \frac{27,8 \text{ m/s}}{10 \text{ s}} = 2,78 \text{ m/s}^2$$

Se la stessa auto si fermasse poi in 5 s avrebbe un'accelerazione media in frenata di $-5,56 \text{ m/s}^2$ (il **segno** è importante)

Accelerazione istantanea

Si introduce nella stessa identica maniera in cui è stata introdotta la velocità istantanea

$$a_m(t_1, t_1 + \Delta t) = \frac{v(t_1 + \Delta t) - v(t_1)}{\Delta t} \quad \Delta t \rightarrow 0$$

$$a(t) \underset{\Delta t \rightarrow 0}{=} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

L'accelerazione (istantanea) è la derivata rispetto a t della velocità (istantanea)

Ricapitolando

La velocità si ottiene derivando $s(t)$ rispetto al tempo

L'accelerazione si ottiene derivando $v(t)$ rispetto al tempo
che equivale a derivare due volte $s(t)$ rispetto al tempo

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2s(t)}{dt^2}$$

Moto uniforme

Siccome $v(t) = \text{costante}$ la sua accelerazione è zero ($dv/dt = 0$)

Moto uniformemente accelerato.

Ha accelerazione costante.

Per il moto uniformemente accelerato si ha che la velocità quindi varia secondo la legge

$$v(t) = v_0 + a_0 t$$

Infatti $dv/dt = a_0$

Velocità iniziale al tempo $t=0$

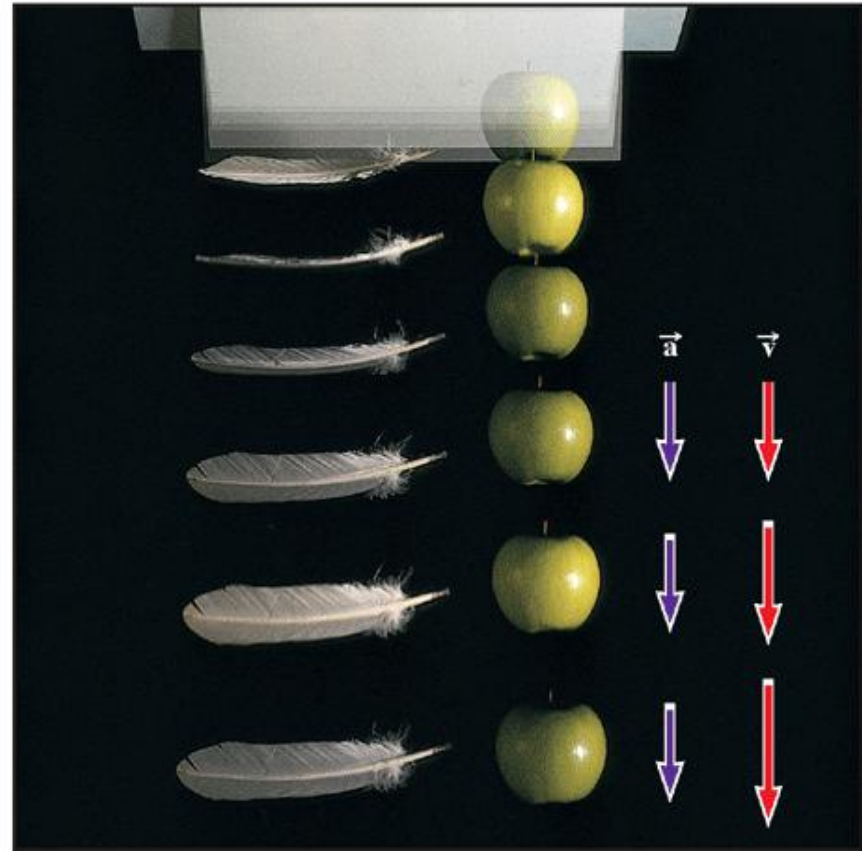


Gli oggetti pesanti che cadono fanno un moto uniformemente accelerato, tutti con la stessa accelerazione indipendentemente dal corpo

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Il suo valore esatto dipende un po' dalla latitudine e dall'altezza

→ [calcolatore di g](#)



©1993 James Sugar/Black Star

Moto uniformemente accelerato.

Qual è la sua equazione oraria?

Dobbiamo trovare una $s(t)$ che derivata ci dia $v(t) = v_0 + a_0 t$

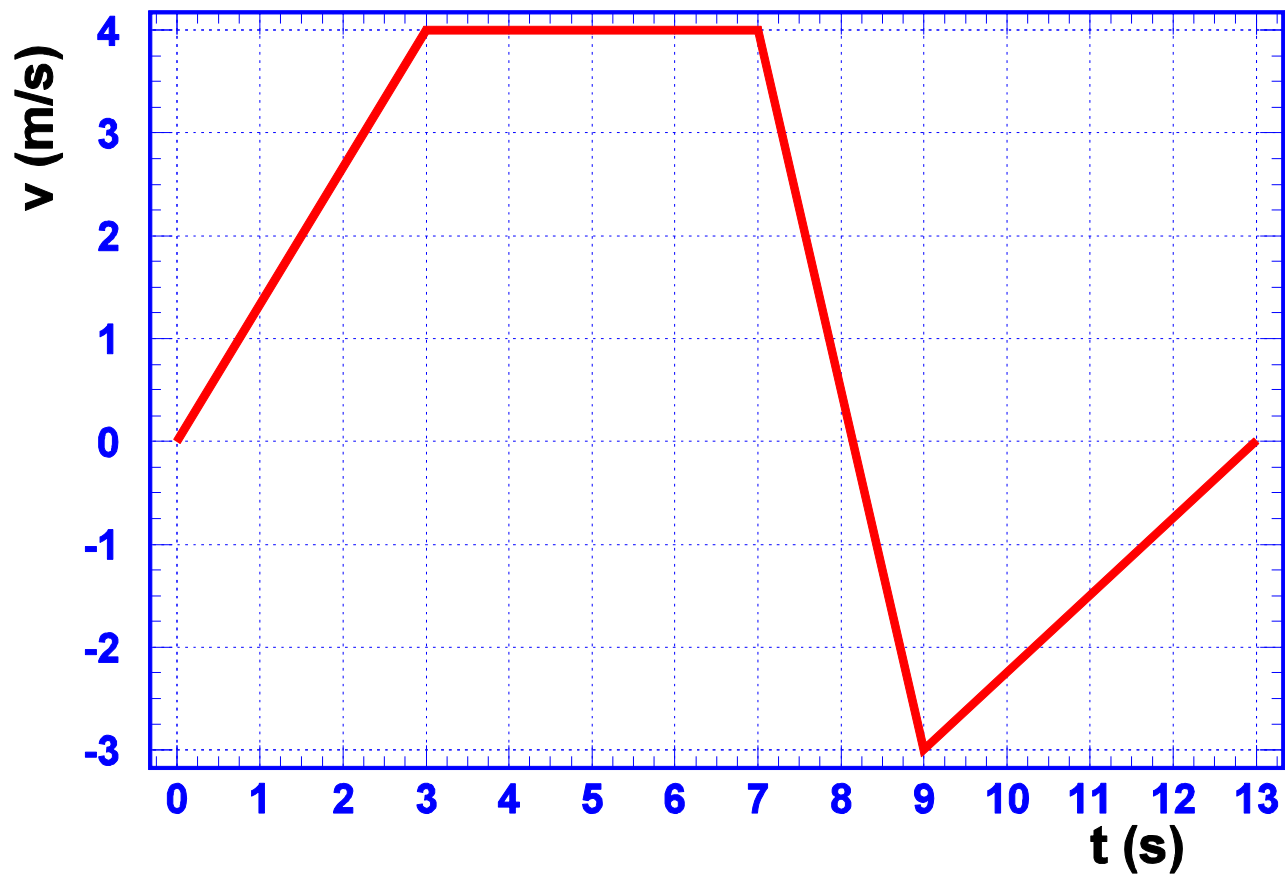
Ci dà v_0

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \dots$$

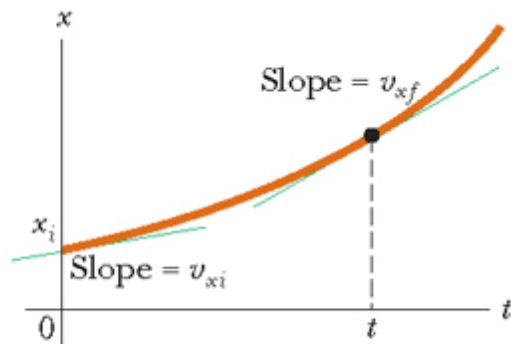
Serve un pezzo che derivato ci dia $a_0 t$



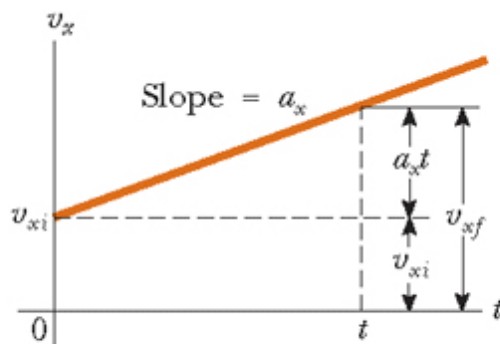
$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$



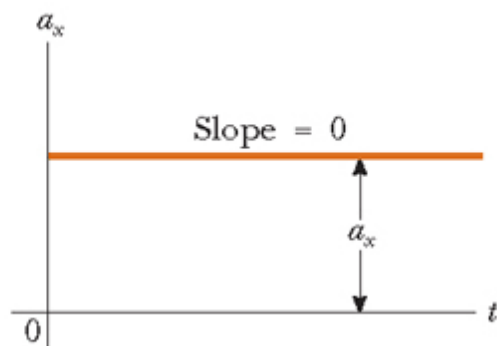
Moto uniformemente accelerato



(a)



(b)



(c)

FIGURA 2.12 Grafici di una particella si muove lungo l'asse x con accelerazione costante a_x ; (a) grafico posizione-tempo, (b) grafico velocità-tempo, (c) grafico accelerazione-tempo.

➔ *Slope = pendenza*



Serway, Jewett
Principi di Fisica, IV Ed.
Edises

Integrazione delle equazioni del moto

➔ Ottenere la legge oraria partendo dall'accelerazione nel caso generale

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t') dt' \quad s(t) = s_0 + \int_0^t v(t') dt'$$



Costante di integrazione.
Rappresenta la
velocità all'istante $t=0$



Costante di integrazione.
Rappresenta la
posizione all'istante $t=0$

Ottenere la legge oraria partendo dall'accelerazione è un'operazione più complessa che il viceversa

➔ sappiamo tutti che un integrale è più difficile di una derivata

➔ la procedura analitica è possibile solo in un numero limitato di casi

Si ricorre quindi spesso a soluzioni numeriche ottenute tramite calcolatori

Esercizio

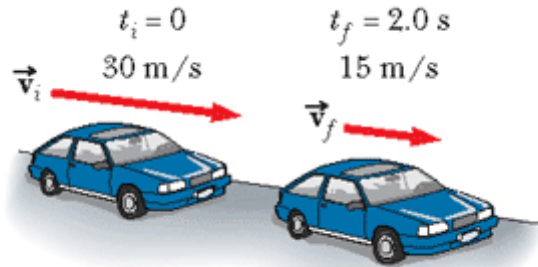


FIGURA 2.9 La velocità dell'auto diminuisce da 30 m/s a 15 m/s in un intervallo di tempo di 2.0 s .

Abbiamo già visto che
 $a_m = -7,5 \text{ m/s}^2$

Considerando il moto uniformemente accelerato trovare tempo e spazio di arresto dall'inizio della frenata

$$v(t) = v_0 + a_0 t \quad v_0 = 30 \text{ m/s} \quad a_0 = -7,5 \text{ m/s}^2$$

*Il tempo di Arresto si trova
Imponendo $v(t^*) = 0$*



$$0 = v_0 + a_0 t^* \Rightarrow t^* = -\frac{v_0}{a_0} = 4 \text{ s}$$

Esercizio

Per trovare lo spazio di arresto L sostituiamo t^ nella legge oraria*

$$s(t^*) = s_0 + v_0 t^* + \frac{1}{2} a_0 t^{*2}$$

$$L = s(t^*) - s_0$$

$$L = v_0 t^* + \frac{1}{2} a_0 t^{*2} = 30 \cdot 4 - 0,5 \cdot 7,5 \cdot 16 = 60 \text{ m}$$

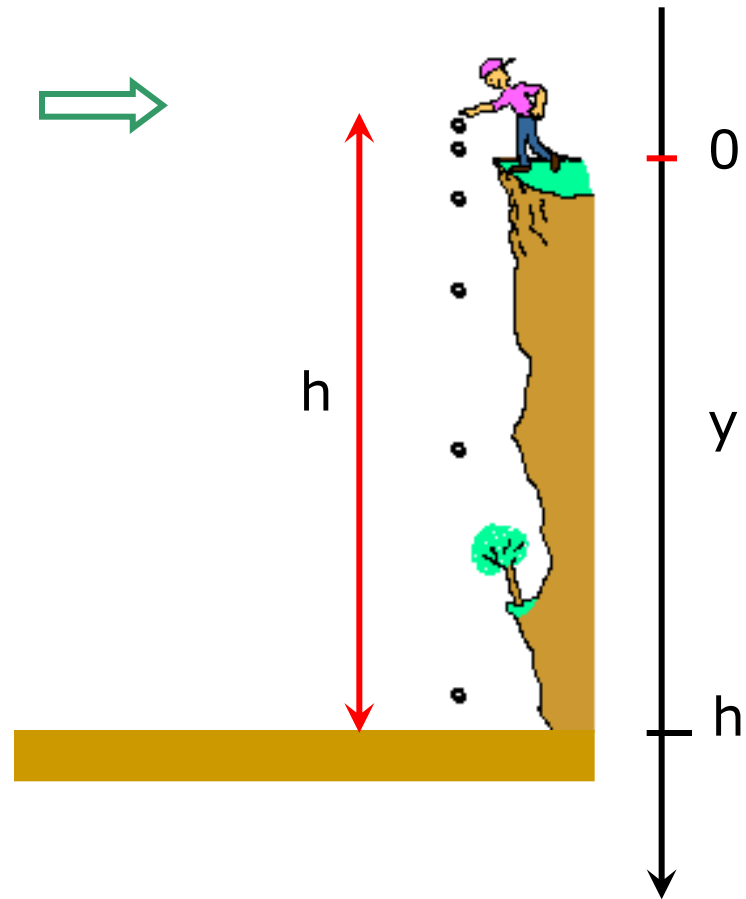
Esercizio

$$h = 0 + \cancel{v_i t} + \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_f = \cancel{v_i} + g t$$

$$t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$v_f = g t^* = \sqrt{2gh}$$



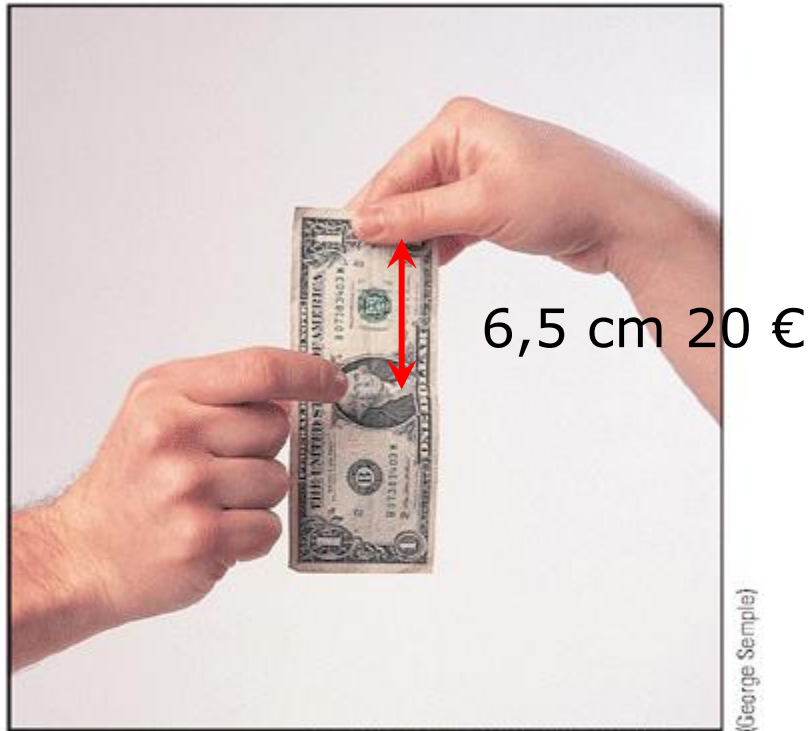


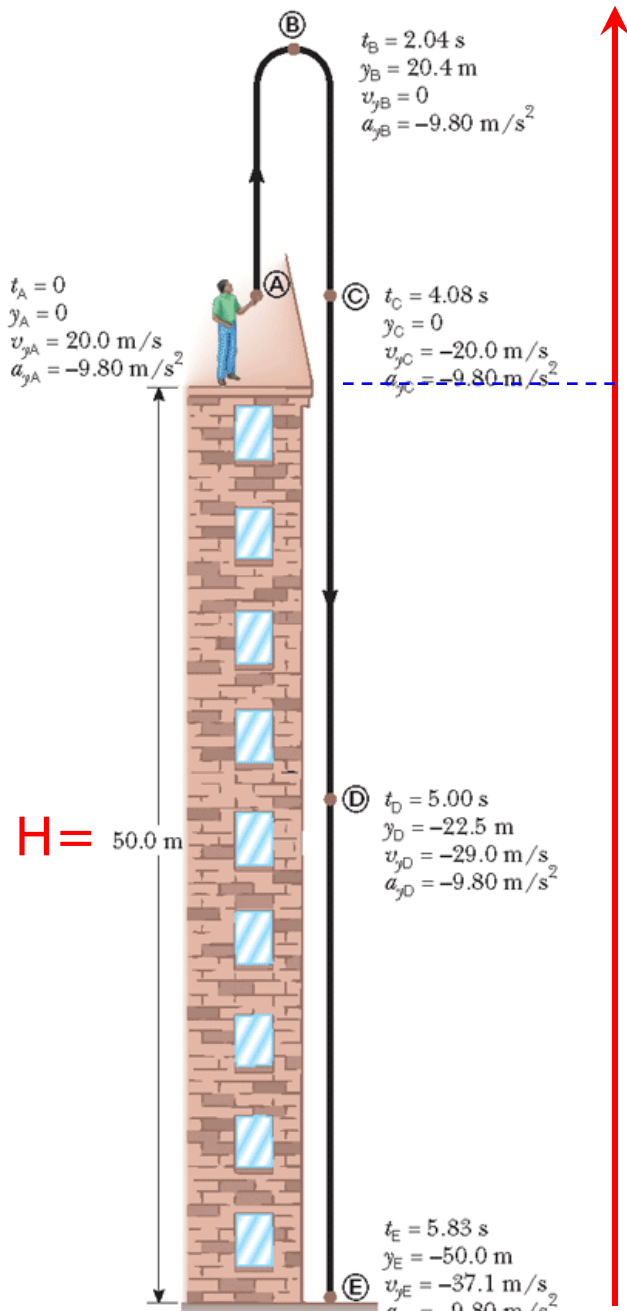
FIGURA 2.15

(Esempio 2.9)



Serway, Jewett
Principi di Fisica, IV Ed.
EdiSES

$$t^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,065}{g}} = 0,12 \text{ s}$$



y

$$y = 0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

0

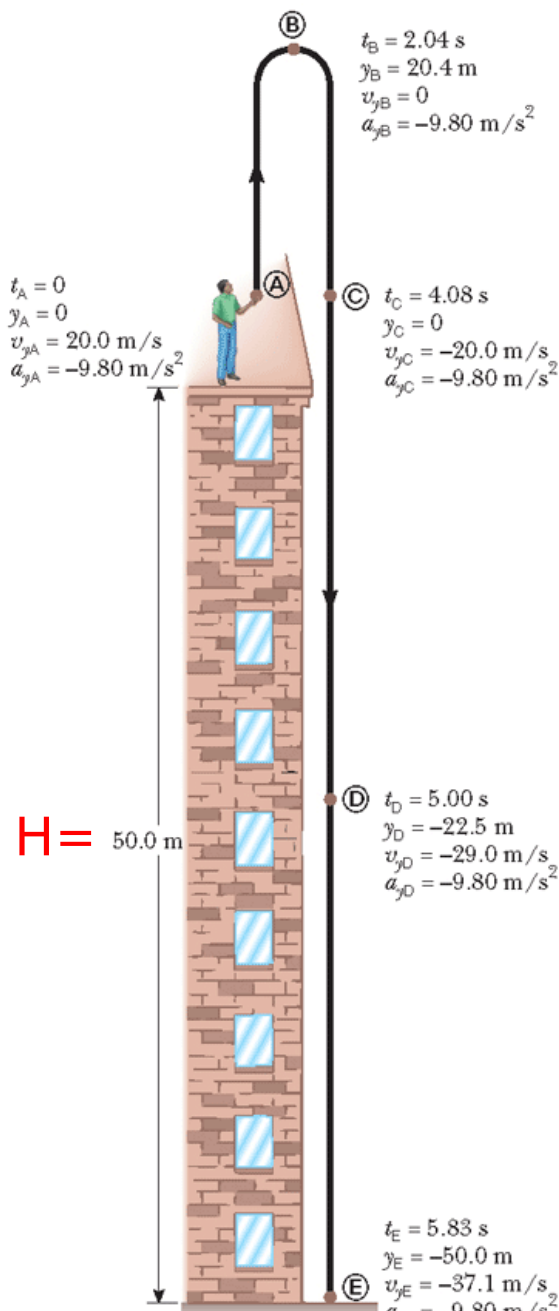
$$v_f = v_0 - g t$$

Troviamo prima l'altezza del punto B

In B la velocità si annulla

$$0 = v_0 - g t^* \Rightarrow t^* = \frac{v_0}{g}$$

$$t^* = 2,04 \text{ s}$$



y

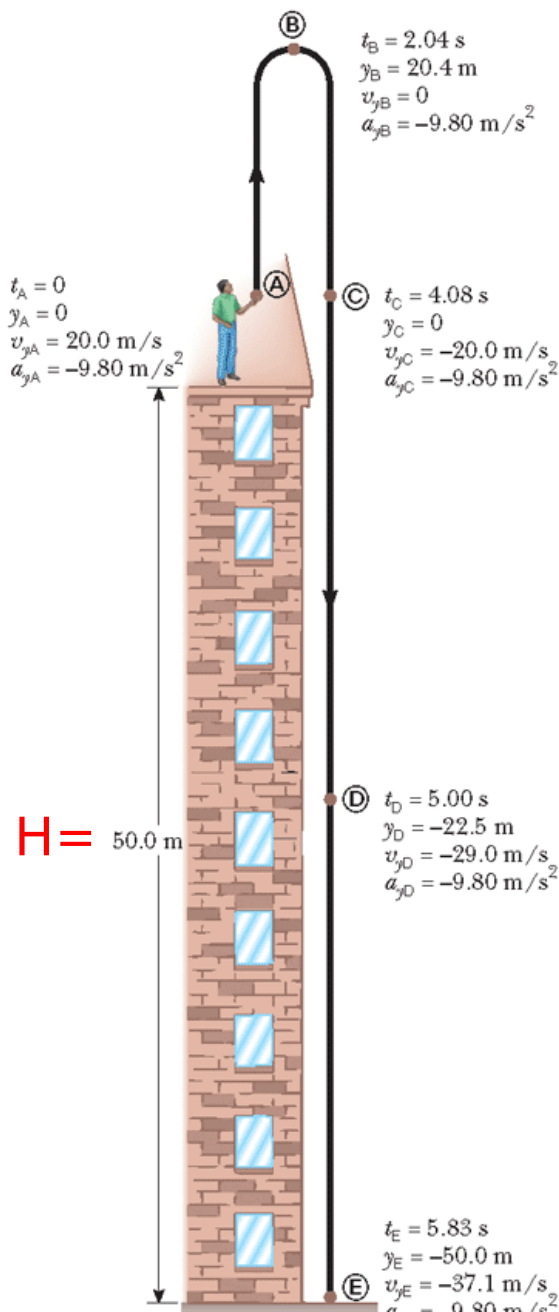
$$y = 0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

0

$$v_f = v_0 - g t$$

Quando ricade in C?

$$t^{**} = 2 \times 2,04 = 4,08 \text{ s}$$



y

$$y = 0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

O

$$v_f = v_0 - g t$$

Quando arriva a terra in E?

$$-H = 0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$g t^2 - 2 v_0 t - 2 H = 0$$

Equazione di II grado

Matematica: l'equazione di II grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \leftarrow 2 \text{ soluzioni}$$

Perché le soluzioni siano reali dev'essere $b^2 - 4ac > 0$

Nel nostro caso

- $a = g = 9,80$

- $b = -2v_0 = -40$

- $c = -2H = -100$

$$\rightarrow b^2 - 4ac = 1600 - 4 \cdot 9,80 \cdot (-100) = 1600 + 3920 = 5520$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

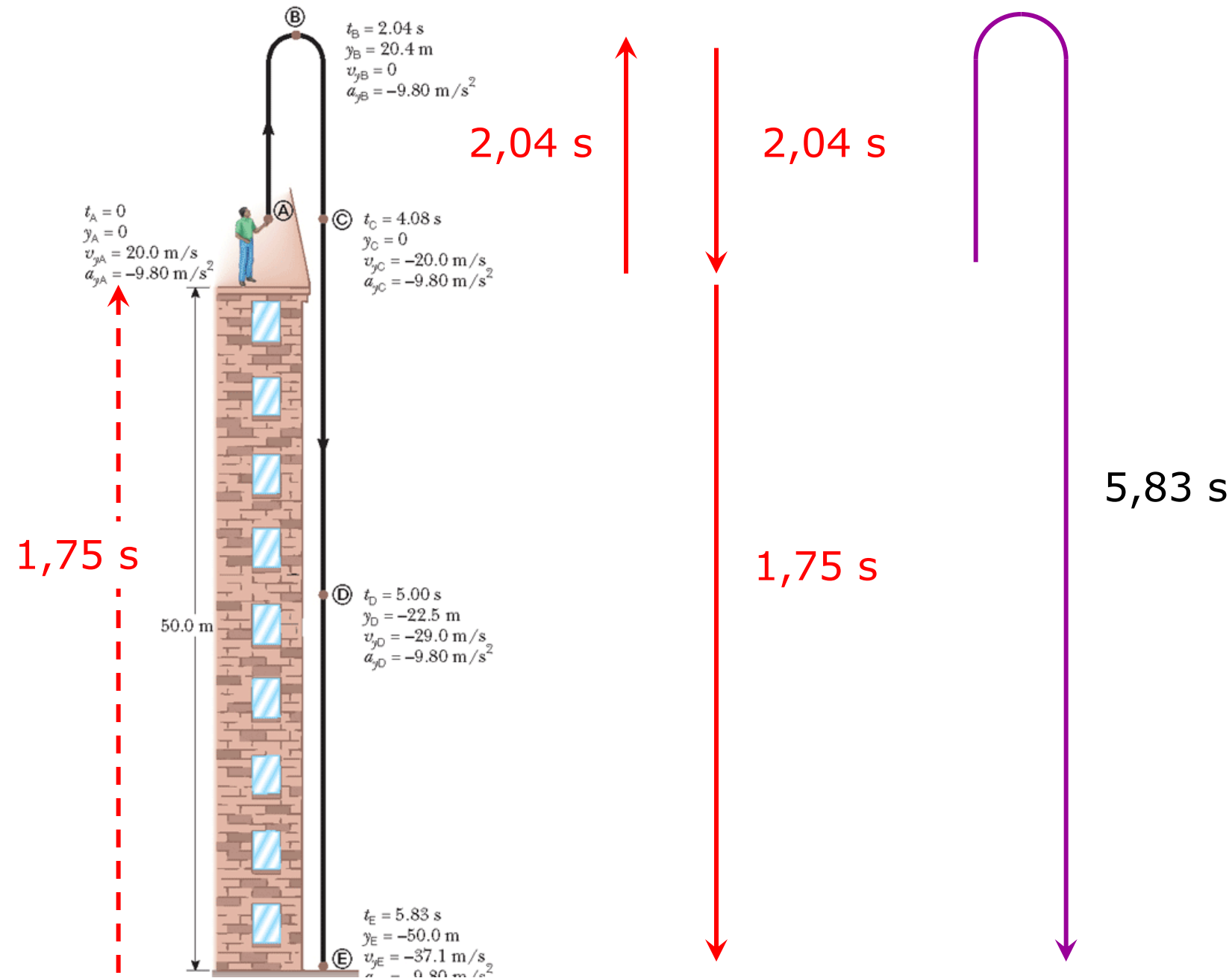
⇓

$$t_1 = \frac{40 + 74,3}{19,6} = 5,83 \text{ s}$$

$$t_2 = \frac{40 - 74,3}{19,6} = -1,75 \text{ s}$$

Scartiamo t_2 **non perché è negativo**

➔ **ma in quanto è precedente al tempo di lancio**



La velocità in funzione dello spazio

Per il moto uniformemente accelerato possiamo ottenere un'importante relazione fra spazio percorso e velocità

Partiamo dalle leggi orarie per spazio e velocità

$$s_f = s_i + v_i t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$
$$v_f = v_i + a_0 t$$

i=iniziale
f=finale

Ricaviamo t dalla II equazione

$$s_f = s_i + v_i t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

$$v_f = v_i + a_0 t$$



$$t = \frac{v_f - v_i}{a_0}$$



Inseriamolo
nella I

$$\begin{aligned} s_f - s_i &= \frac{v_i(v_f - v_i)}{a_0} + \frac{(v_f - v_i)^2}{2a_0} = \\ &= \frac{2v_i v_f - 2v_i^2 + v_f^2 + v_i^2 - 2v_i v_f}{2a_0} \end{aligned}$$

$$2a_0(s_f - s_i) = v_f^2 - v_i^2$$

$$2a_0(s_f - s_i) = v_f^2 - v_i^2$$

Da questa possiamo per esempio ottenere subito lo spazio di frenata mettendo $v_f=0$

$$L = \frac{-v_i^2}{2a_0}$$



negativo per cui L
viene positivo

$$2a_0(s_f - s_i) = v_f^2 - v_i^2$$

oppure troviamo subito la velocità con cui un corpo pesante arriva a terra se lasciato cadere dall'altezza h

$$v_f^2 = 2gh \quad \Rightarrow \quad v_f = \sqrt{2gh}$$