

FISICA GENERALE I

Docente: Prof. G. Carboni
giovanni.carboni@cern.ch

Esercitatore: Dott. R. Petrillo
roberto.petrillo@roma2.infn.it

Anno Accademico 2012 - 2013

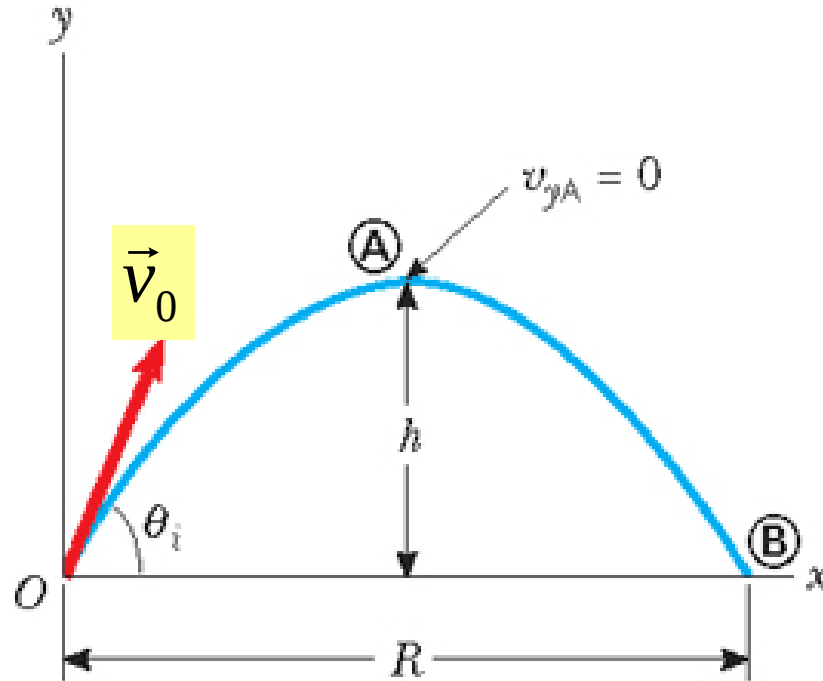
Queste lezioni sono scaricabili in formato pdf
dalla pagina

<http://people.roma2.infn.it/carboni>

UTENTE: fis1_studenti
PW: disp_fis1

→ *Necessario Adobe Reader*

Proiettili (continuazione)

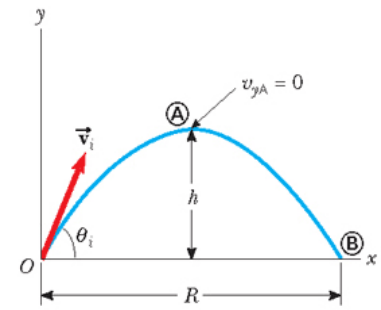


$$\vec{V}_0 \equiv (v_{0x}, v_{0y})$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

La gittata con punto di partenza e di arrivo allo stesso livello



$$R = v_{0x} t^* = \frac{2v_{0x} v_{0y}}{g}$$



$$R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

E' massima per
 $\theta = 45^\circ$

Lancio da una torre

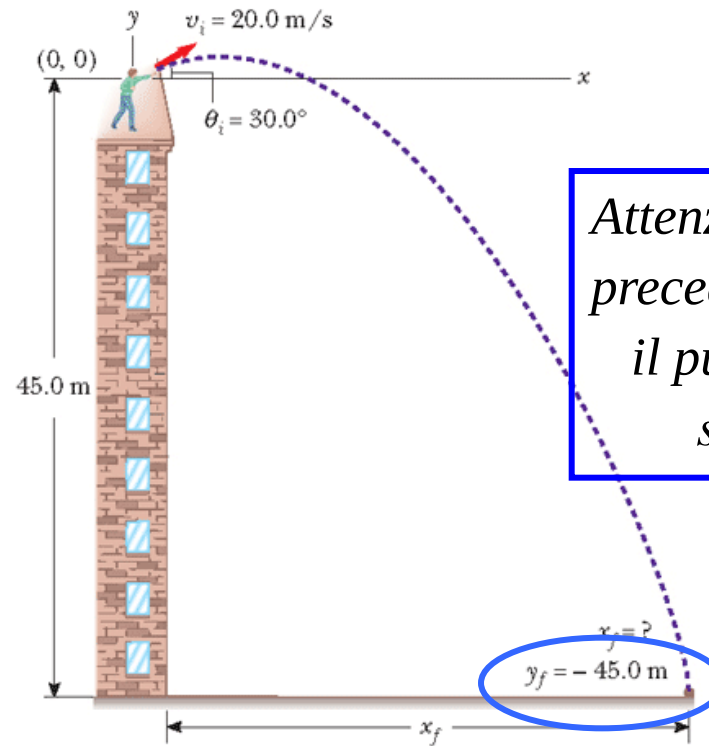


FIGURA 3.9

(Esempio 3.2) Una pietra è lanciata dalla cima di un edificio.



Serway, Jewett
Principi di Fisica, IV Ed.
EdiSES

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t$$

$$y(t) = H + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\theta = 30^\circ \quad H = 45 \text{ m} \quad v_0 = 20 \text{ m/s}$$

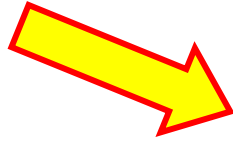
☞ Sistema di coordinate diverso da quello suggerito in figura

☞ Asse y verso l'alto, quindi l'accelerazione di gravità è negativa



$$v_{0x} = v_0 \cos \theta = 17,3 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta = 10 \text{ m/s}$$



Troviamo il tempo t^* quando il proiettile cade a terra

$$0 = H + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$gt^2 - 2v_{0y}t - 2H = 0$$



Equazione di 2° grado: troveremo due soluzioni e dovremo scegliere quella buona

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$gt^2 - 2v_{0y}t - 2H = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t^* = \frac{2v_{0y} \pm \sqrt{4v_{0y}^2 + 8Hg}}{2g}$$



Una verifica è sempre utile prima di mettere i numeri nelle formule

La verifica la facciamo prendendo casi estremi di cui già conosciamo il risultato per altra via.

$$t^* = \frac{2v_{0y} \pm \sqrt{4v_{0y}^2 + 8Hg}}{2g}$$



Ad esempio, se mettiamo nella formula $v_{0y} = 0$ dobbiamo ritrovare i risultati per l'oggetto lasciato cadere da fermo

$$t^* = \frac{\sqrt{8Hg}}{2g} = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 3,03 \text{ s}$$





Due verifiche sono meglio di una.
Se $H=0$ dobbiamo ritrovare il risultato per il tiro
da terra

$$t^* = \frac{2v_{0y} \pm 2v_{0y}}{2g} = \begin{cases} 0 \\ 2v_{0y} / g = 2,04 \text{ s} \end{cases}$$



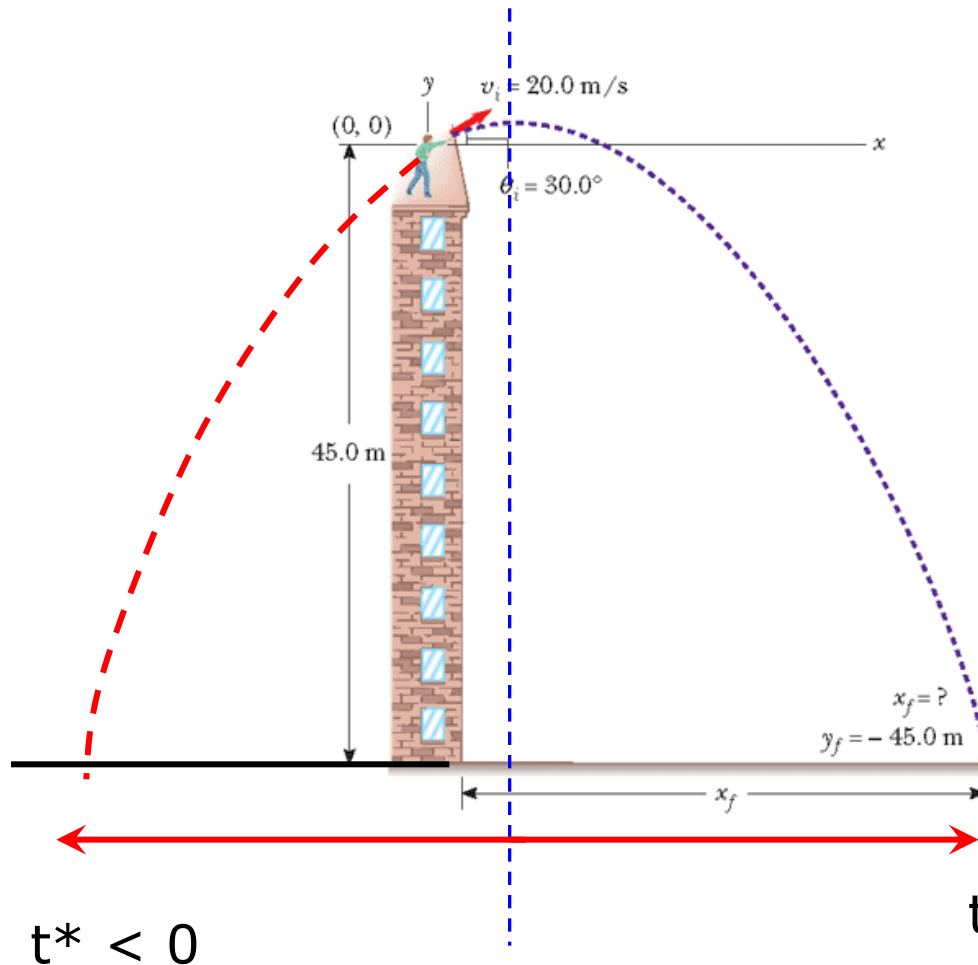
torniamo ora al caso generale

$$t^* = \frac{2v_{0y} \pm \sqrt{4v_{0y}^2 + 8Hg}}{2g}$$

semplifico un 2

$$t^* = \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 + 2Hg}}{g} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 882}}{9,8} = \frac{10 \pm 31,3}{9,8}$$

Dobbiamo scegliere fra due soluzioni
Notiamo che una ci dà $t^* < 0$



quella giusta



$$t^* = \frac{10 - 31,3}{9,8} = -2,17 \text{ s}$$

$$t^* = \frac{10 + 31,3}{9,8} = 4,21 \text{ s}$$

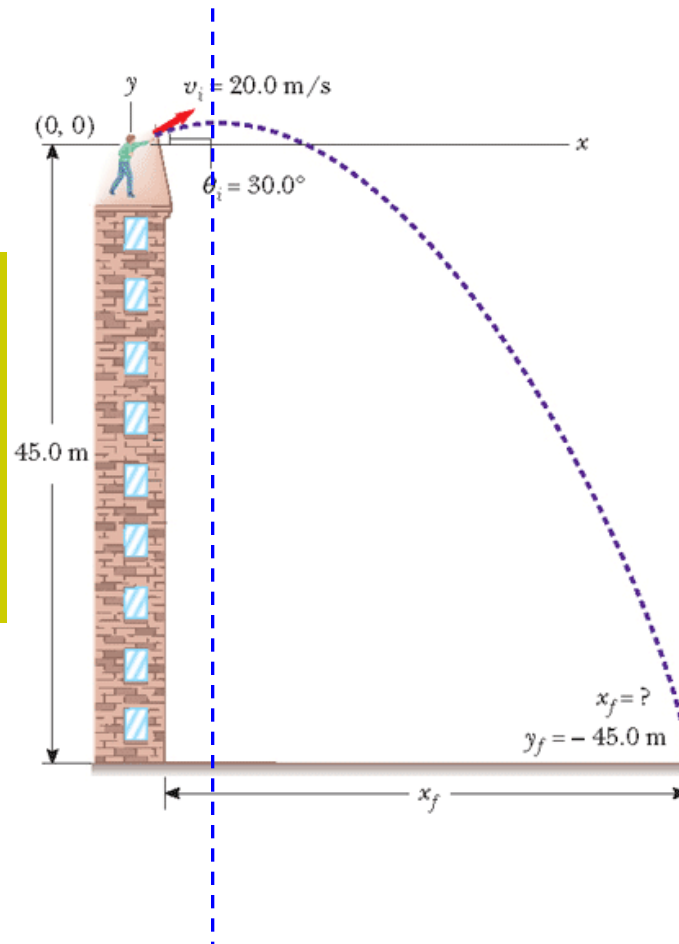
Al solito la soluzione negativa corrisponde a un evento prima del lancio.

-2,17 s è il tempo in cui un ipotetico lanciatore “fantasma” al suolo avrebbe dovuto lanciare la palla per farla passare fra le mani del lanciatore “reale” al tempo $t=0$.

L'equazione oraria ha soluzioni positive e negative che sono tutte valide, se interpretate correttamente.

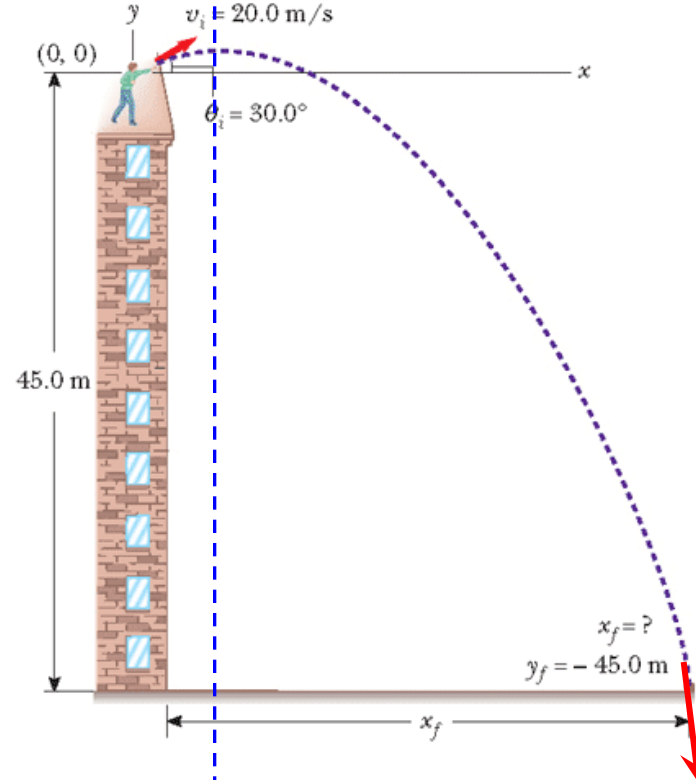
→ *In meccanica non esiste un senso del tempo privilegiato. Tornare indietro nel tempo è possibile.*

Per trovare il punto
d'impatto ricordiamo
che lungo x il
proiettile viaggia
a $v = \text{costante} = v_{0x}$



$$x_f = 4,21 \times v_{0x} = 4,21 \times 17,3 = 72,9 \text{ m}$$

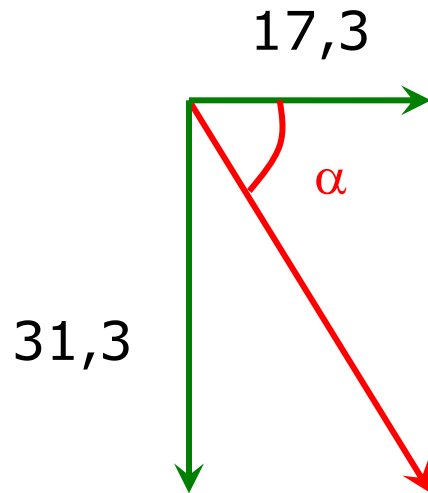
Velocità all'impatto col suolo



Usiamo le equazioni

$$v_x(t^*) = v_{0x} = 17,3 \text{ m/s}$$

$$v_y(t^*) = v_{0y} - gt^* = 10 - 9,8 \times 4,21 = -31,3 \text{ m/s}$$



Modulo della velocità

$$v_0 = \sqrt{17,3^2 + 31,3^2} = 35,8 \text{ m/s}$$

Angolo con l'orizzontale

$$\tan \alpha = \left| \frac{v_{0x}}{v_{0y}} \right| = \frac{31,3}{17,3} \Rightarrow \alpha = 61,1^\circ$$

Traiettoria di un proiettile

E' il luogo dei punti percorsi dal proiettile

Non contiene il tempo. E' una curva nello spazio

Si ottiene dalle leggi orarie per x e y eliminando il tempo e quindi esprimendo una coordinata in funzione dell'altra

Conviene esprimere t in funzione di x essendo nel moto dei gravi la dipendenza lineare. Poi si sostituisce nella legge oraria di y.

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x - x_0}{v_{0x}}$$

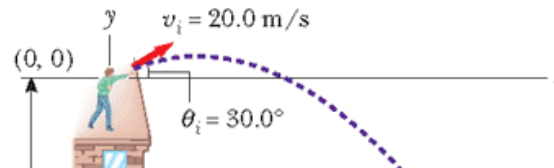
Scegliamo il sistema di assi per avere $x_0=0$

Otteniamo

$$y = H + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{0x}^2}$$

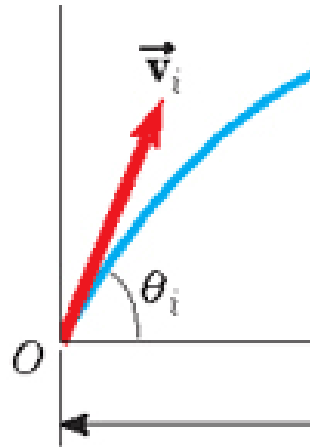
Questa funzione rappresenta una parabola che passa per $y=H$ $x=0$ e per $x=2 v_{0x} v_{0y} / g$

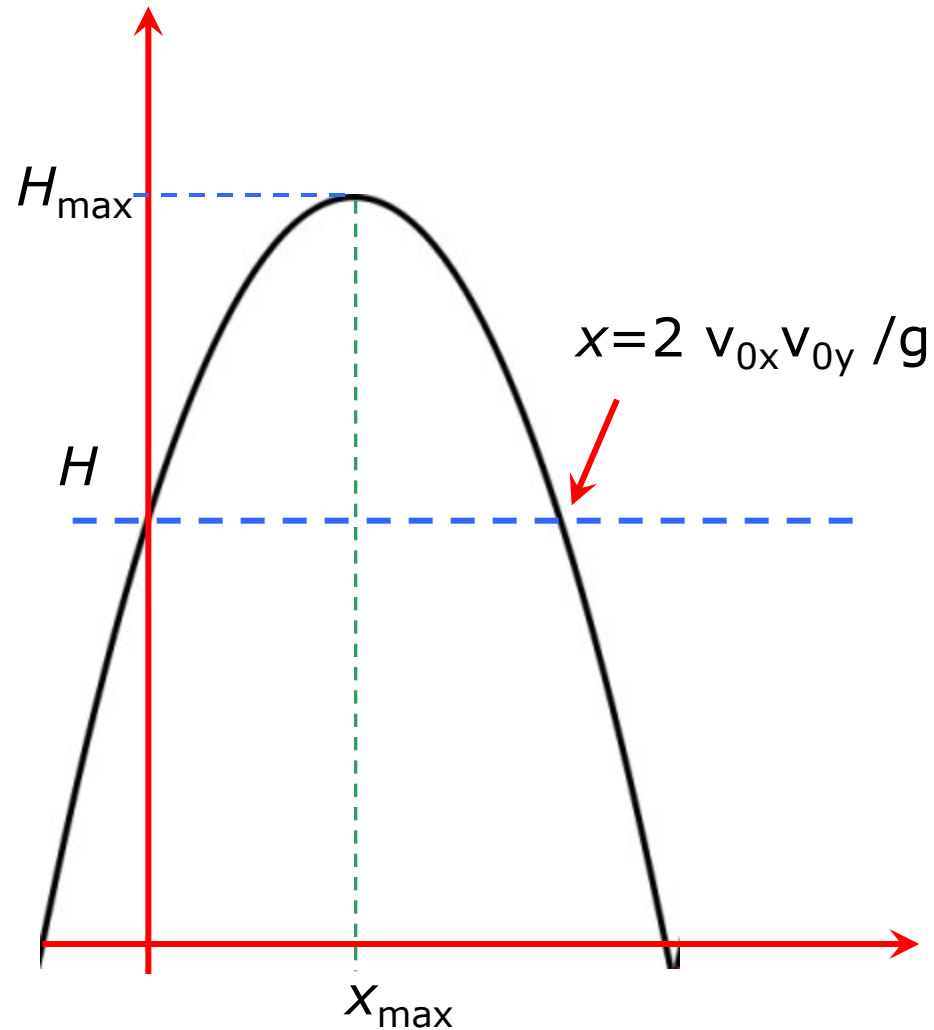
La concavità è sempre rivolta verso il basso



Possiamo anche scrivere la parabola così

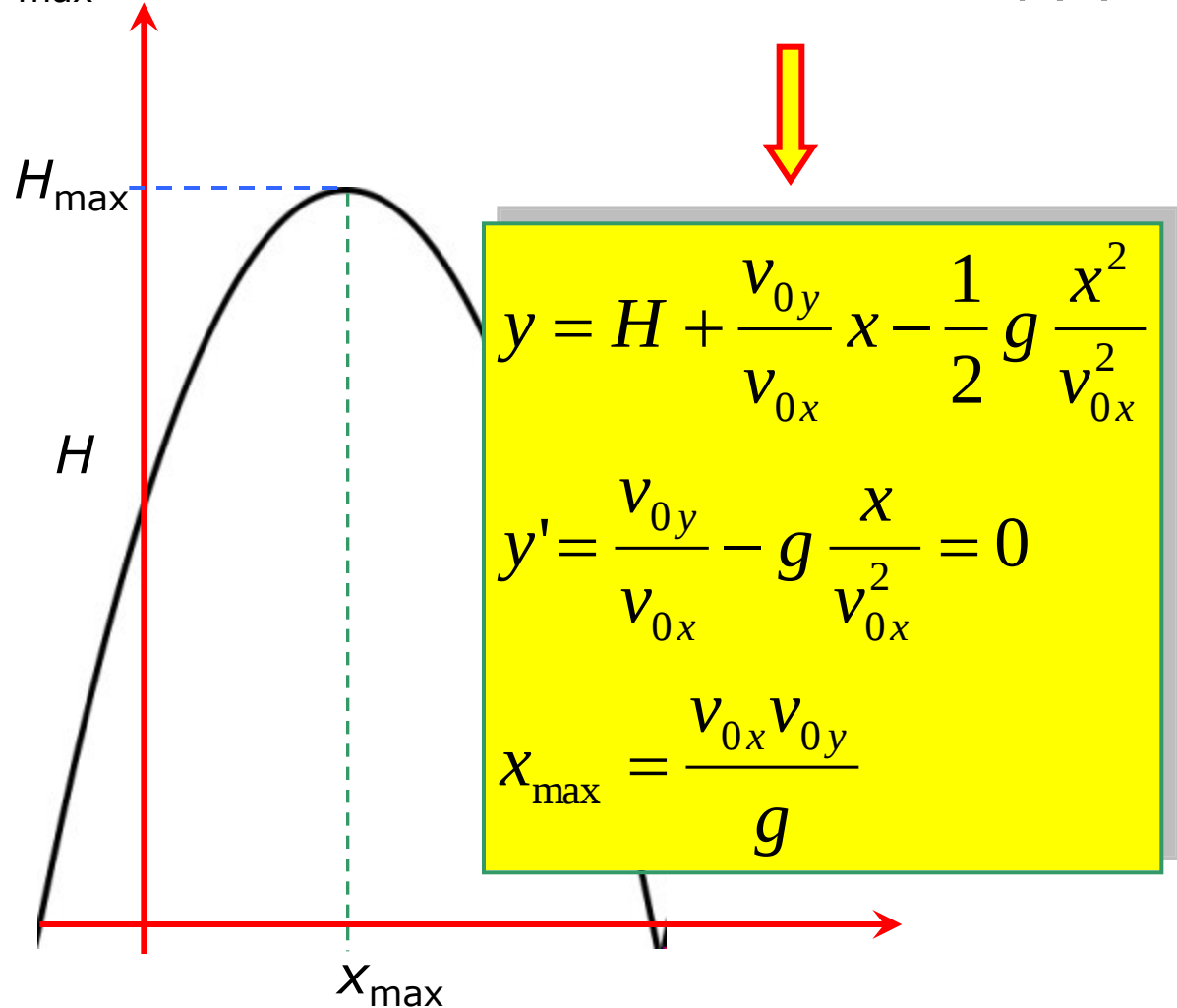
$$y = H + x \tan \theta - \frac{1}{2} \frac{gx^2}{v_0^2 \cos^2 \theta}$$





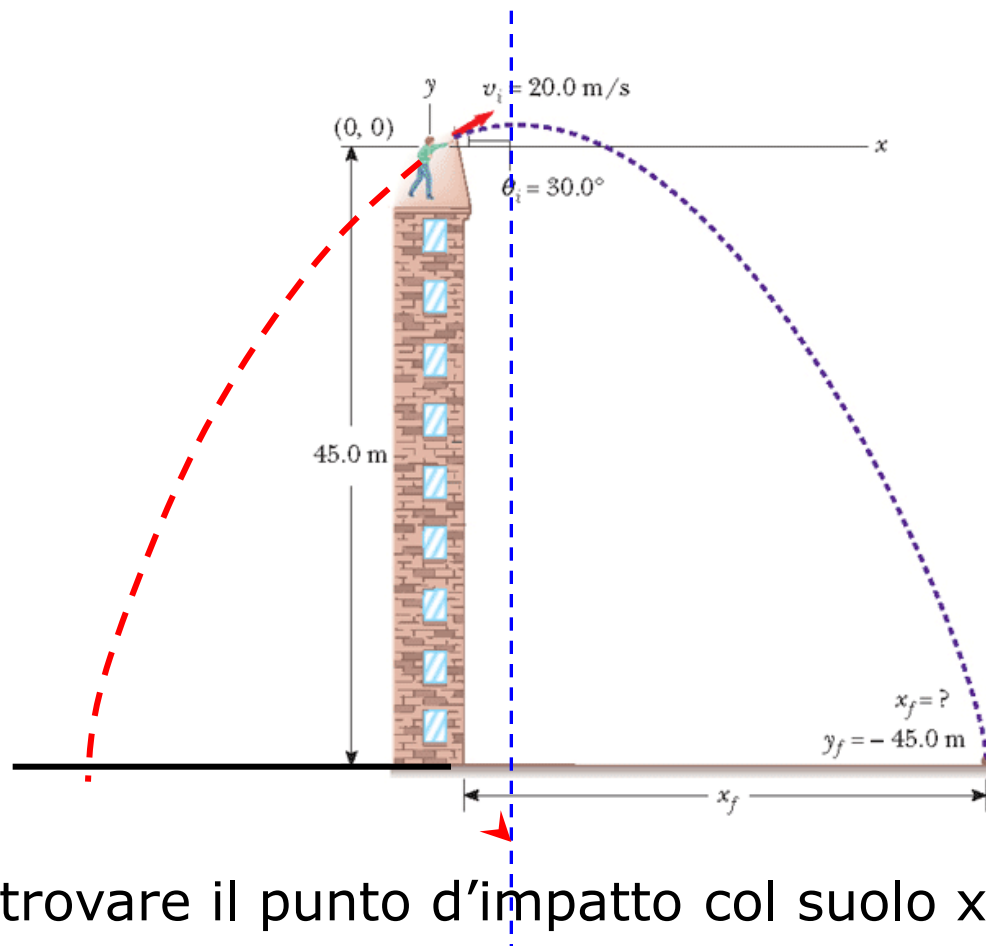
La parabola è simmetrica attorno a $x_{\max}$

Per trovare $x_{\max}$ e $H_{\max}$ si cerca il massimo della funzione $y(x)$



Sostituendo in y
si trova $H_{\max}$

$$H_{\max} = H + \frac{v_{0y}^2}{2g}$$



Per trovare il punto d'impatto col suolo x_f scriviamo

$$0 = H + x \tan \theta - \frac{1}{2} \frac{gx^2}{v_0^2 \cos^2 \theta}$$

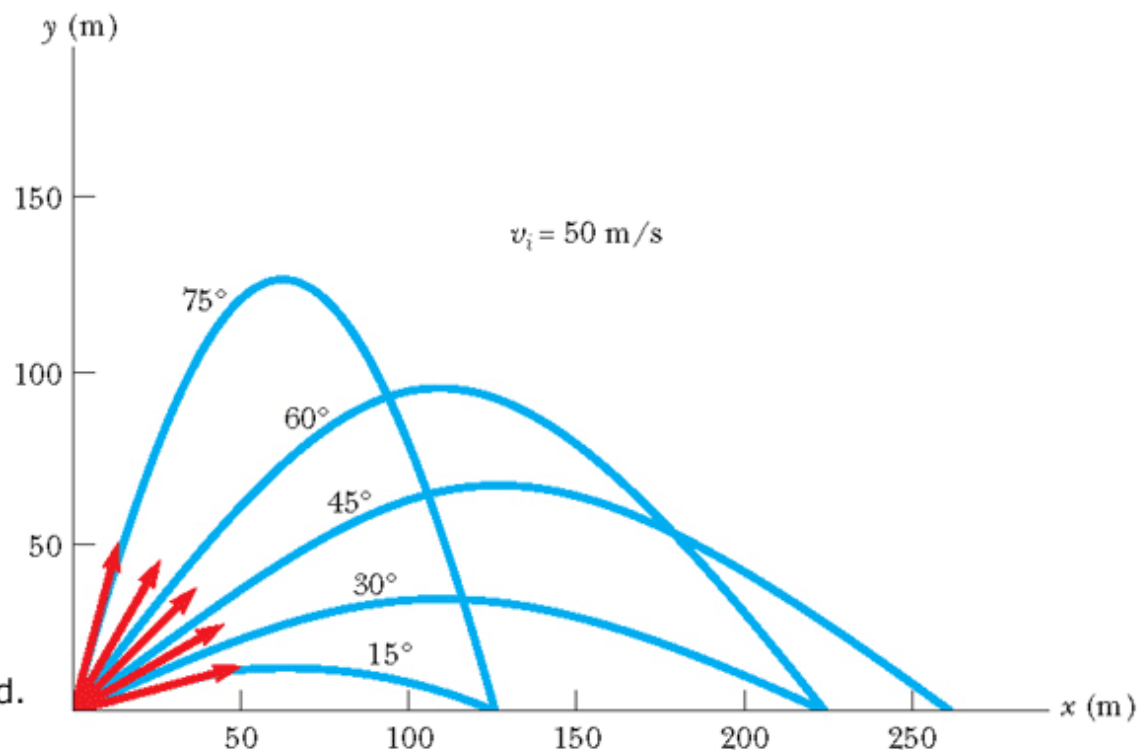
L'equazione è di 2° grado per cui ci sono anche qui due soluzioni

- la positiva corrisponde al punto d'impatto
- la negativa corrisponde alla posizione del lanciatore "fantasma"

e esaminandole scopriremmo che sono le stesse che abbiamo trovato prima

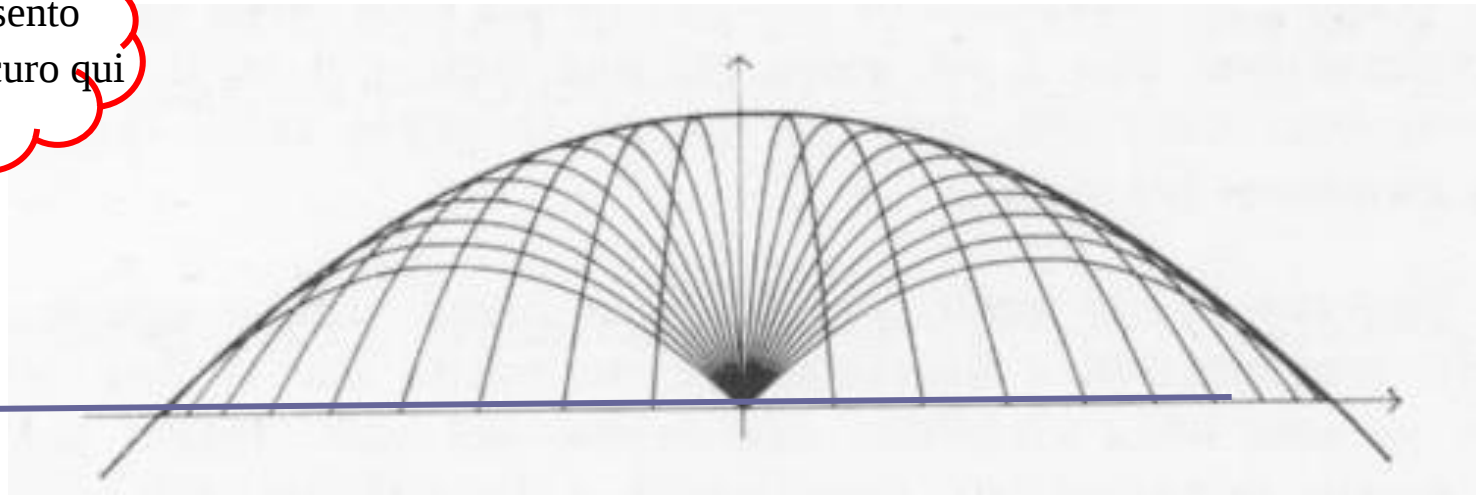
FIGURA 3.8

Un proiettile lanciato dall'origine con un modulo della velocità iniziale di 50 m/s a vari angoli di lancio. Si noti che per valori complementari di θ_i si otterrà lo stesso valore di R .

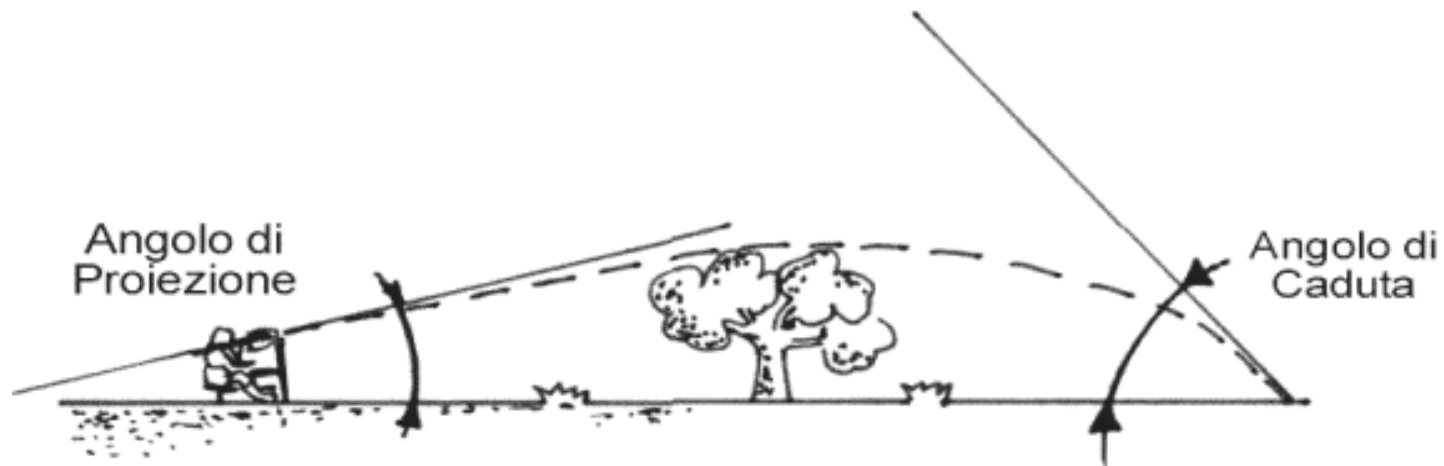


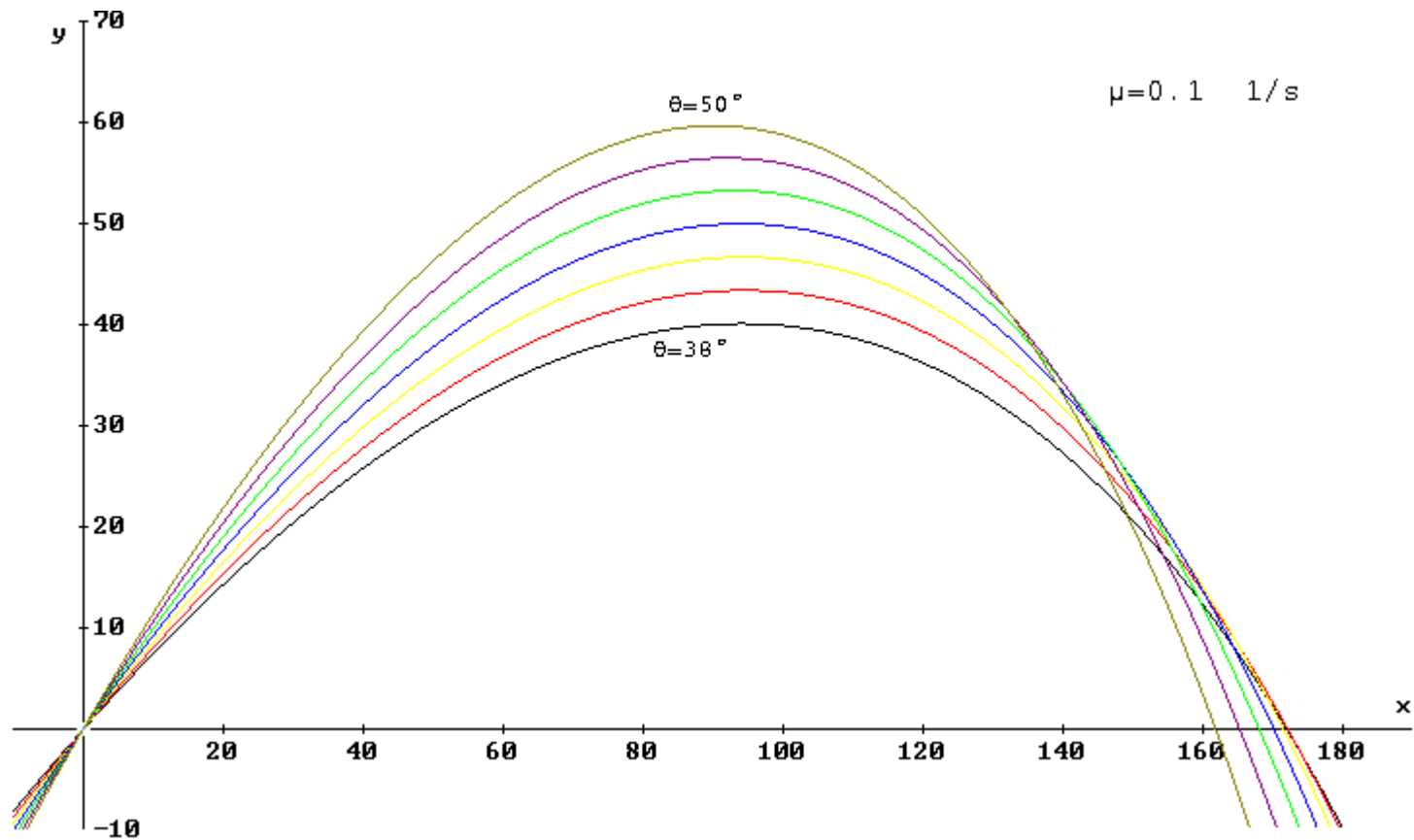
Serway, Jewett
Principi di Fisica, IV Ed.
EdiSES

- Le traiettorie del proiettile saranno diverse a seconda della direzione di tiro ma avranno tutte la stessa forma a parabola. Variando l'inclinazione di tiro avremo gittate diverse. A parità di velocità iniziale di tiro la zona raggiungibile è costituita dai punti del piano per i quali passa almeno una delle curve percorse dai proiettili sparati a diverse angolazioni. La curva che la delimita si chiama *inviluppo* delle curve date. Nel nostro caso essa è ancora una parabola, che si chiama *parabola di sicurezza* (fig).



La resistenza dell'aria modifica la traiettoria che non sarà più parabolica. Infatti c'è un rallentamento sia in x che in y .





traiettorie non paraboliche con resistenza dell'aria

http://www.robertofantini.it/moto_parabolico_eq_diff.htm

Un altro caso è quello del lancio di un oggetto da un aereo/treno/auto....

Se il pacco viene lasciato andare $v_{0y} = 0$

mentre v_{0x} è la velocità orizzontale dell'aereo

Si risolve poi come gli altri

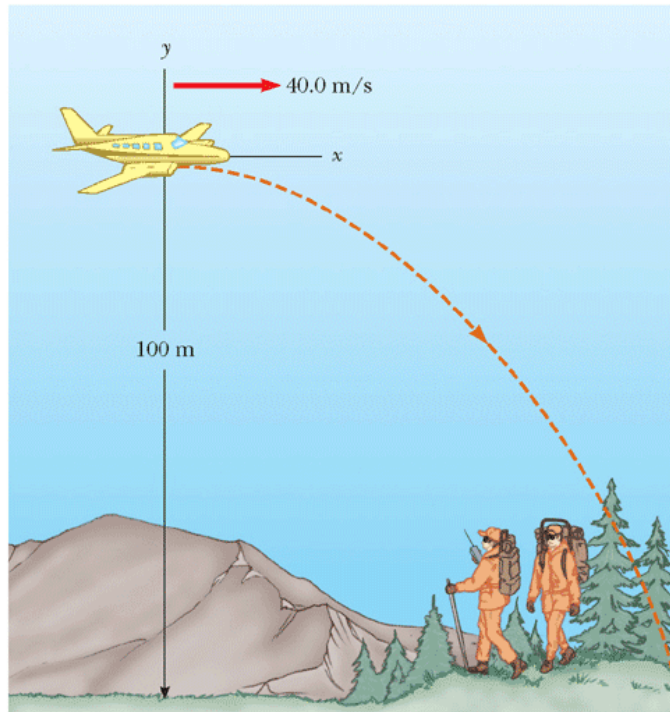


FIGURA 3.10

(Esempio 3.3) Un pacco viveri di emergenza è lanciato da un aereo ad esploratori in difficoltà.



E' equivalente risolvere il problema con le equazioni del moto o con la traiettoria

E' più facile ricordarsi però le leggi orarie che l'equazione della parabola

Se il problema richiede fra le altre cose di calcolare anche la velocità del proiettile bisogna sempre ricorrere alle equazioni orarie ➡ quindi tanto vale partire da quelle per risolvere il problema.

Accelerazione nello spazio

$\vec{g}$

$\vec{a}_C$

$\vec{a}_T$

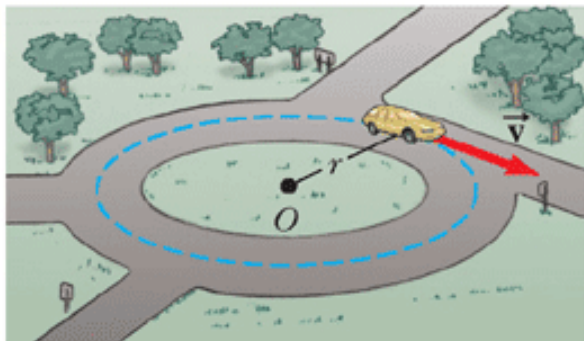
$\vec{g}$

Costruzione grafica dell'accelerazione

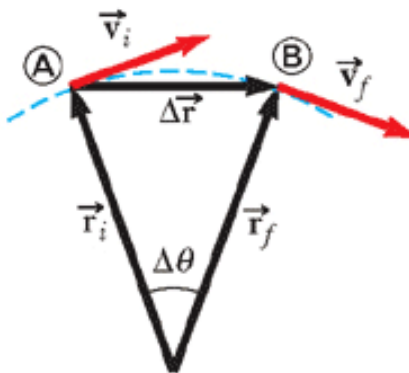
Come abbiamo detto, nello spazio si ha accelerazione quando il vettore velocità cambia

Quando parliamo di cambiamento dobbiamo ricordare che questo può essere

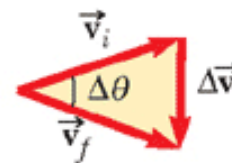
- in modulo
- in direzione
- in entrambi



(a)



(b)

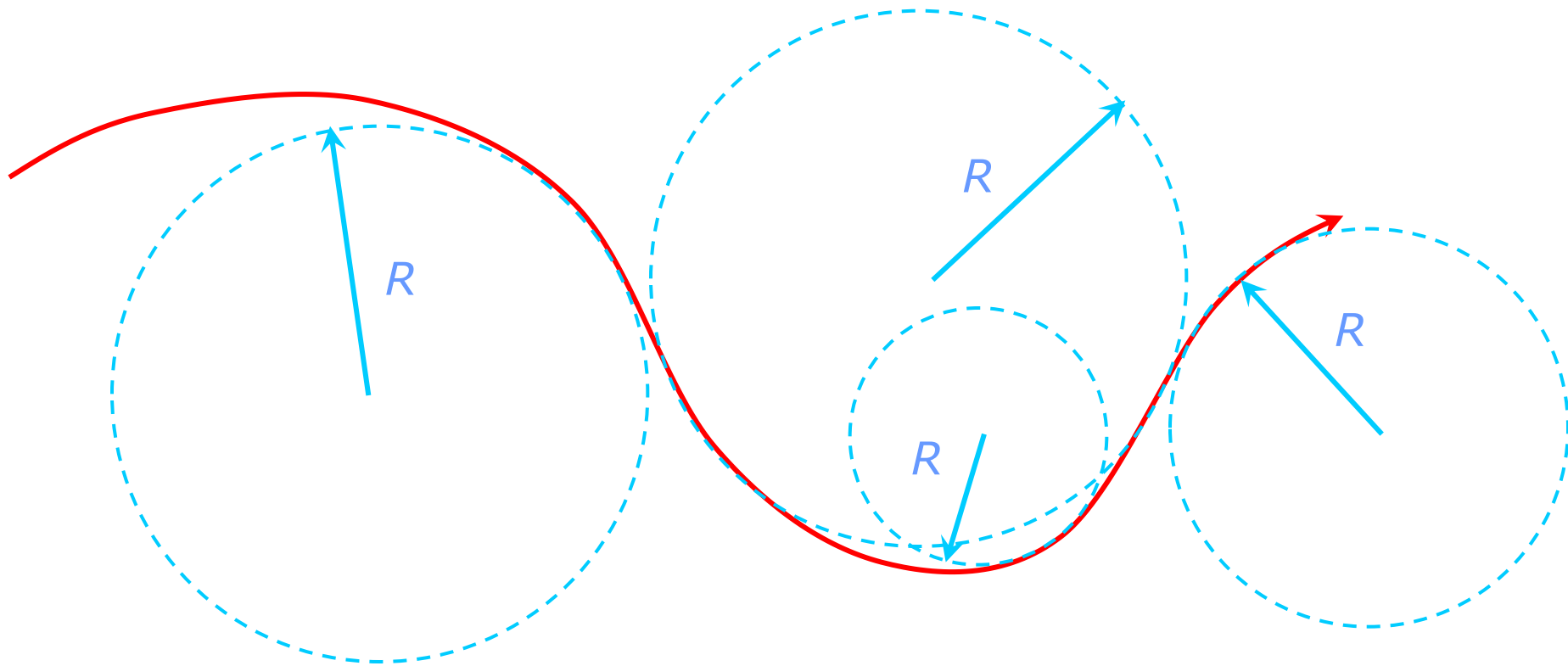


(c)

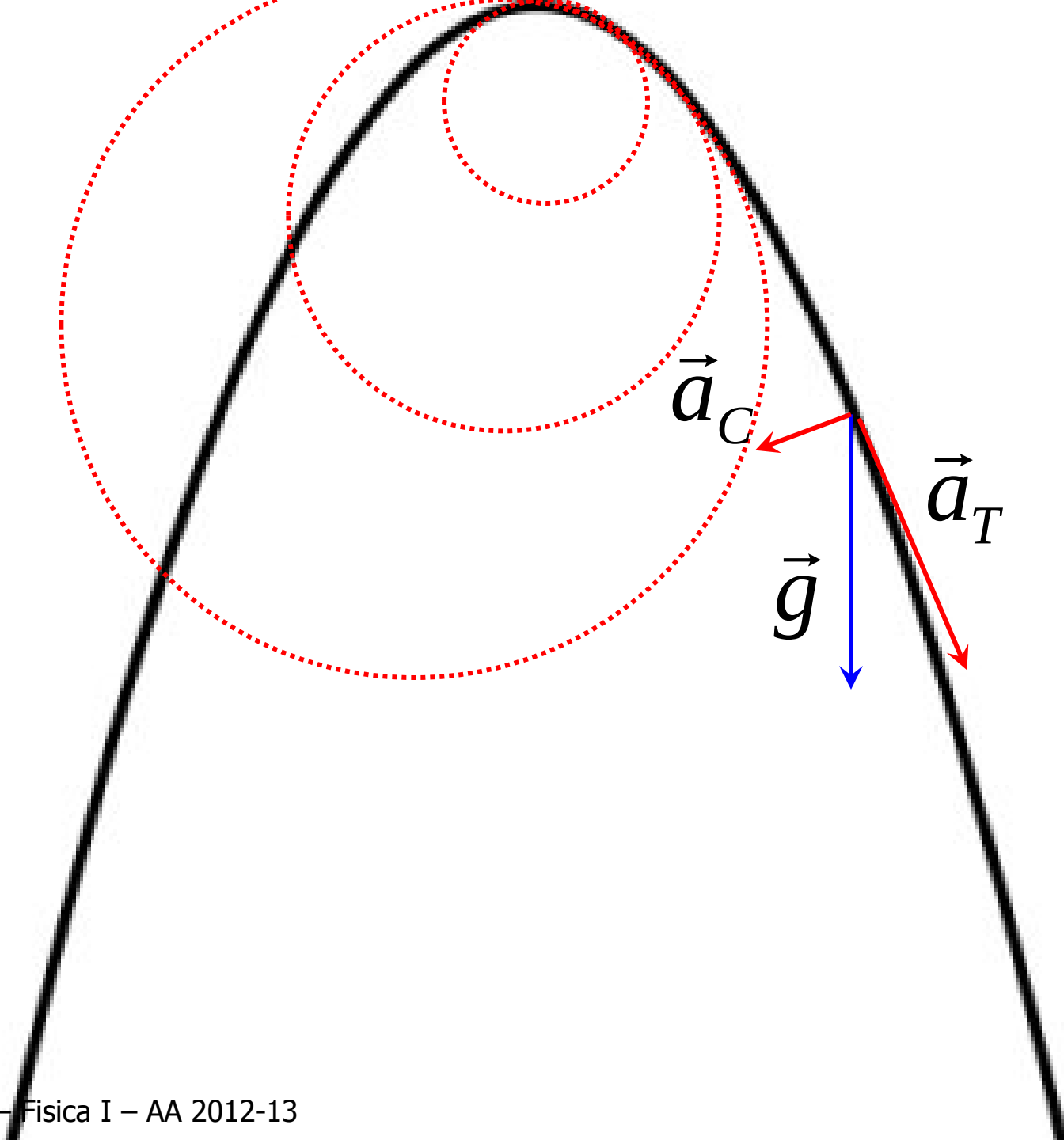
C'è accelerazione anche se $|\vec{v}| = \text{costante}$

Vedremo ora che l'accelerazione in questo caso è diretta verso il centro

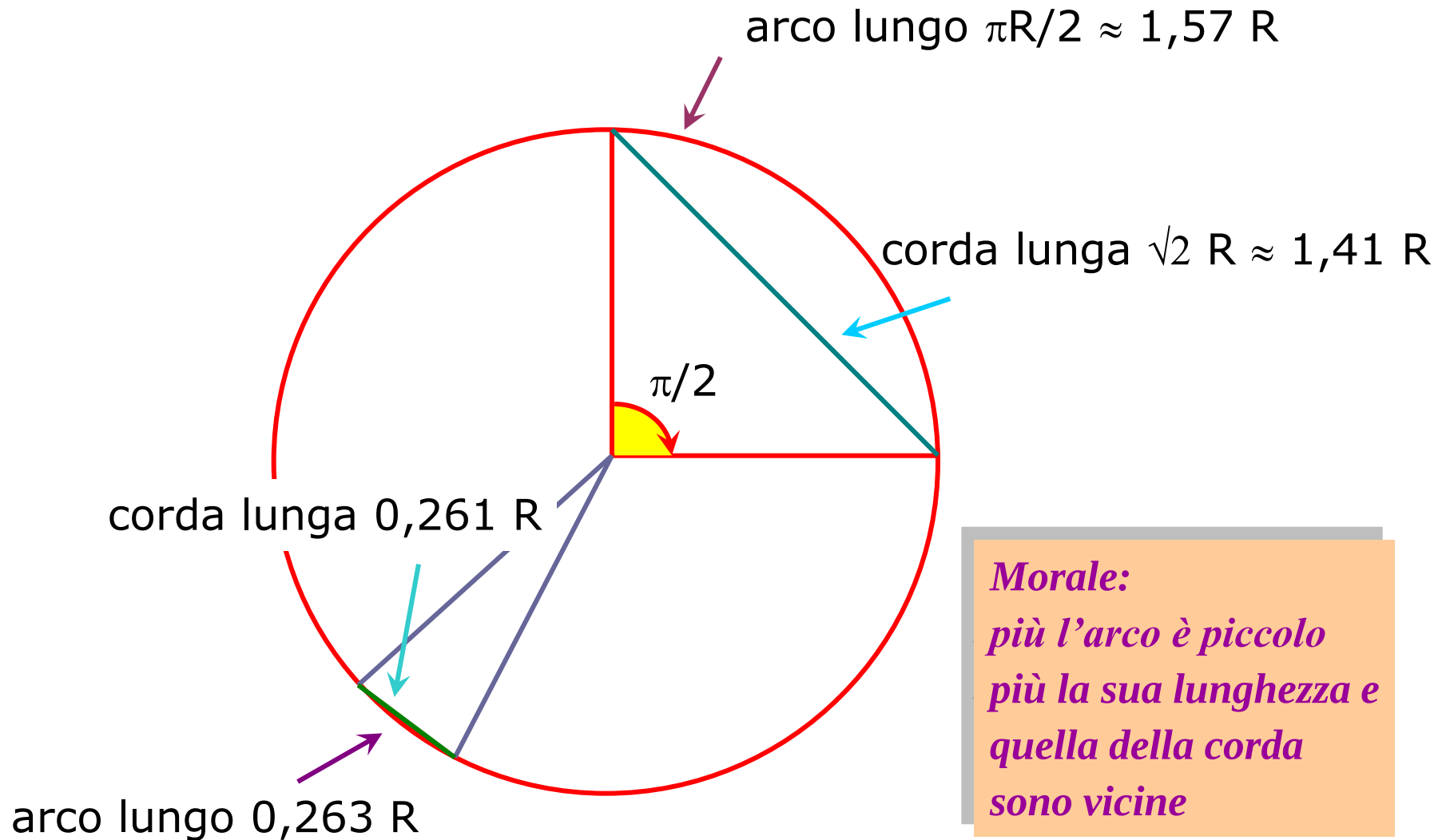
Se la traiettoria non è un cerchio?



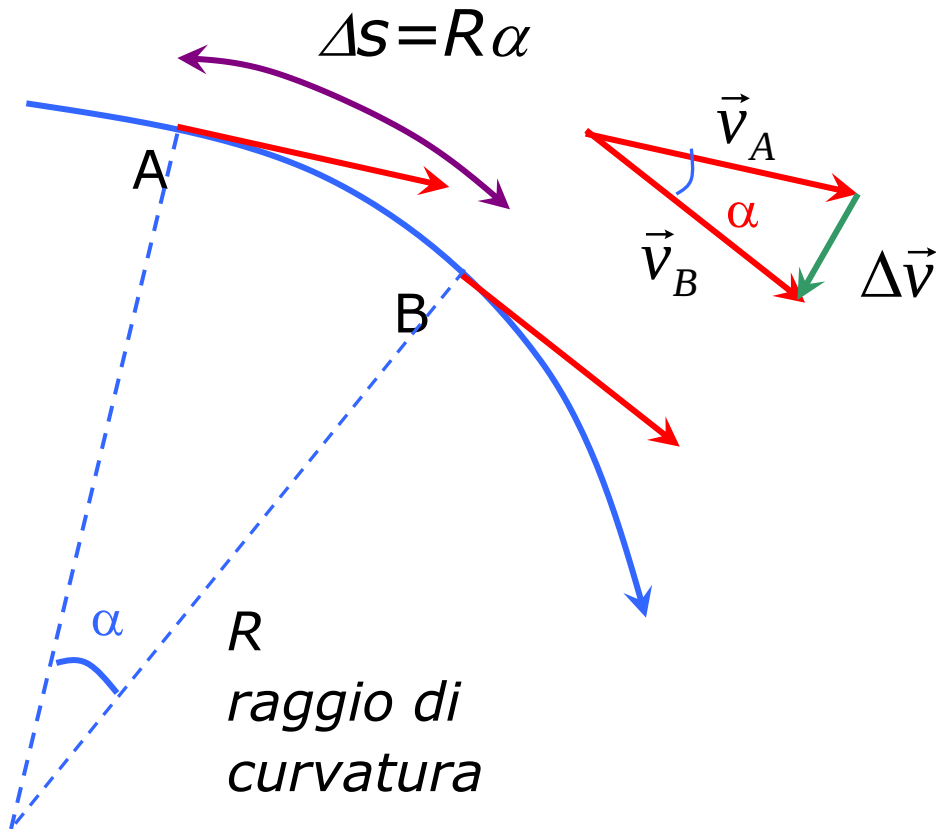
possiamo localmente approssimarla con dei cerchi di raggio variabile (cerchi tangenti)



Richiamo importante di geometria



Accelerazione centripeta

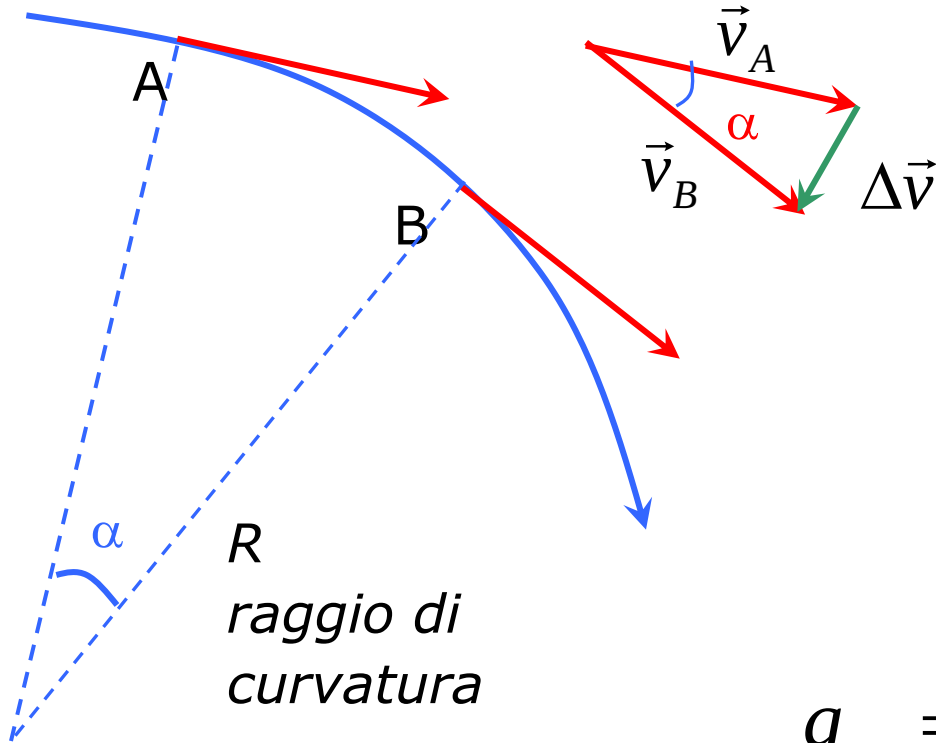


Caso in cui la velocità
è costante in modulo



La direzione di $\Delta\vec{v}$
tende alla normale alla
traiettoria

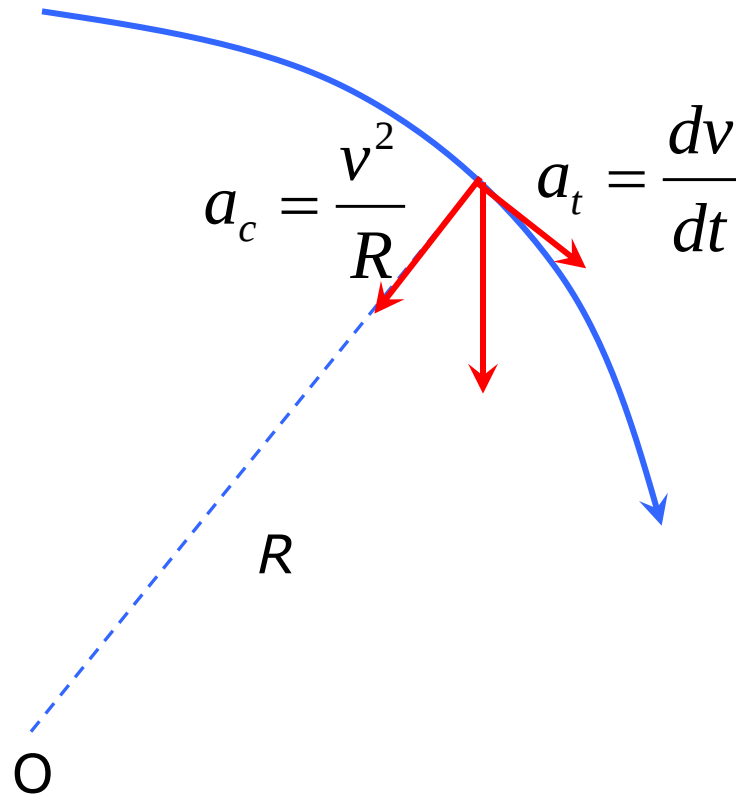
$$|\Delta\vec{v}| \approx v \cdot \alpha = v \cdot \frac{\Delta s}{R}$$



$$|\Delta \vec{v}| \approx v \cdot \alpha = v \cdot \frac{\Delta s}{R}$$

$$a_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = v \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{R \Delta t} = \frac{v^2}{R}$$

Accelerazione tangenziale



E' non zero solo se
la velocità cambia in
modulo

a_t è la derivata del modulo di v

Un confronto



F1 in rettilineo 0-200 km/h in 6 s

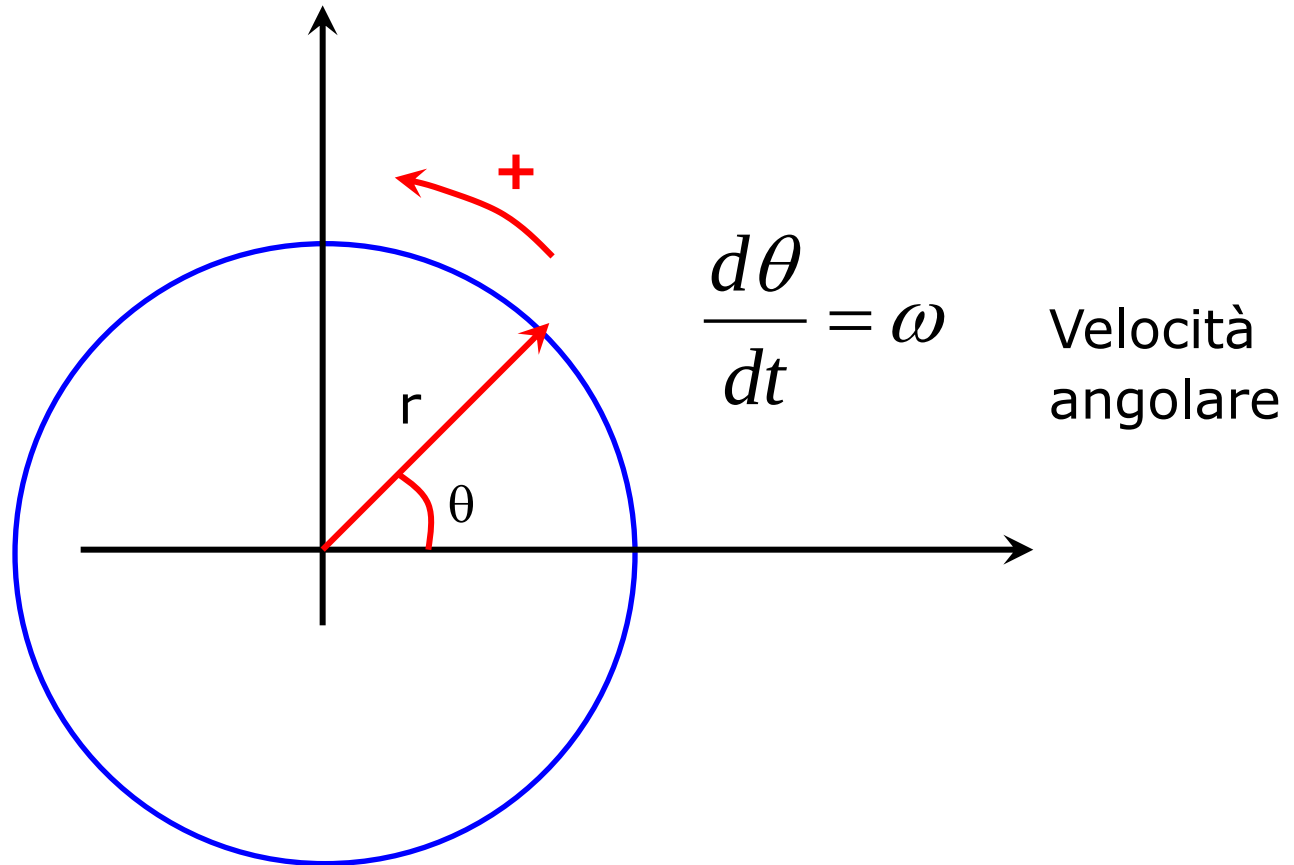
$$a_t = \frac{200000}{3600 \cdot 6} = 9,3 \quad \text{m/s}^2 \approx 0,94 \, g$$

500 a 95 km/h su curva di
raggio $R=70$ m

$$a_c = \left(\frac{95000}{3600} \right)^2 \frac{1}{70} = 9,9 \quad \text{m/s}^2 \approx 1,01 \, g$$



Moto circolare uniforme



ω si misura in radianti al secondo

Se è costante abbiamo il moto circolare uniforme

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

Periodo e frequenza

➔ Il periodo T è semplicemente il tempo che ci vuole a fare 1 giro completo

Dato che un giro corrisponde a un angolo di 2π radianti

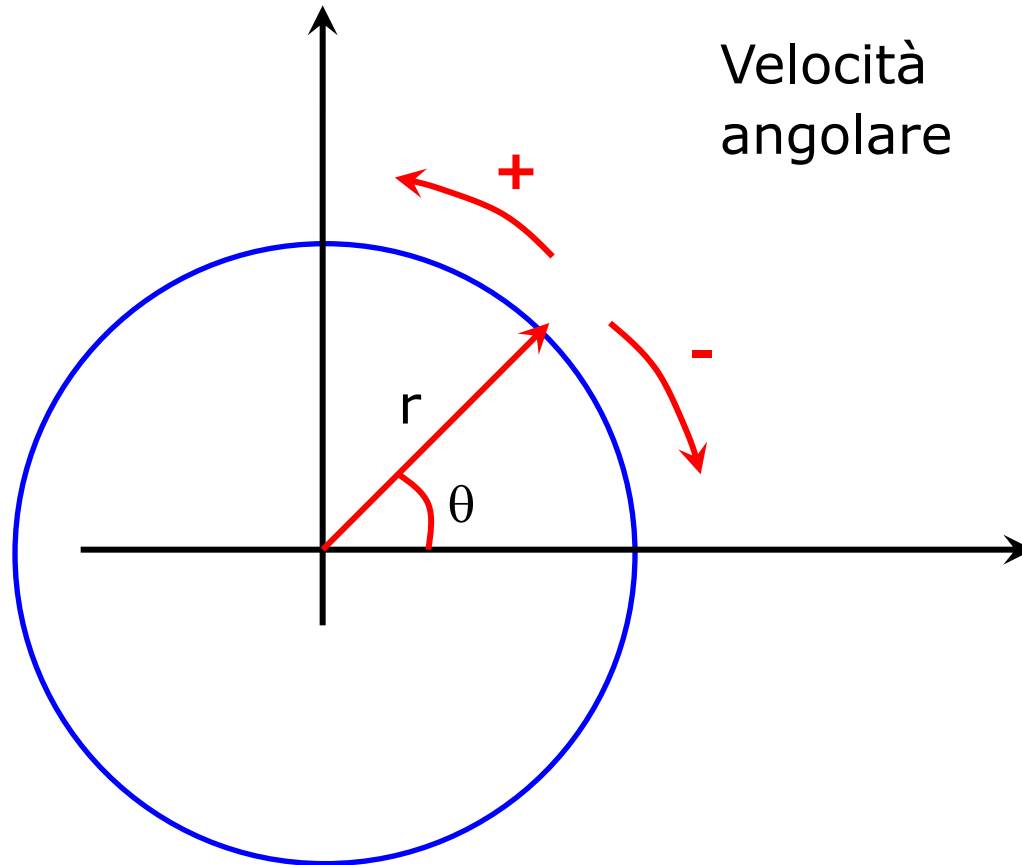
$$\omega T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad [T] = [\text{tempo}]$$

➔ La frequenza f è semplicemente il numero di giri fatti in 1 s

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Unità: 1 Hz = 1 giro/s

Moto circolare uniforme



$$x = r \cos \theta = r \cos(\theta_0 + \omega t)$$

$$y = r \sin \theta = r \sin(\theta_0 + \omega t)$$

Consideriamo

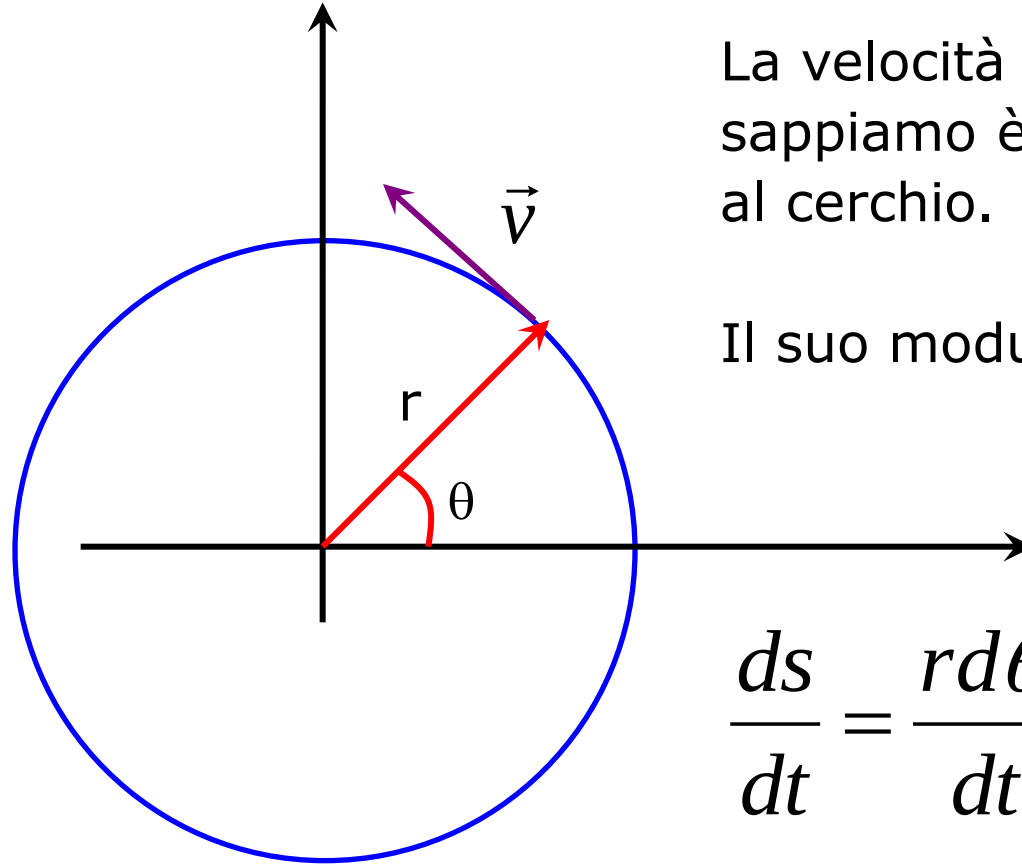
$$\theta_0 = 0$$



$$x = r \cos \omega t$$

$$y = r \sin \omega t$$

Moto circolare uniforme



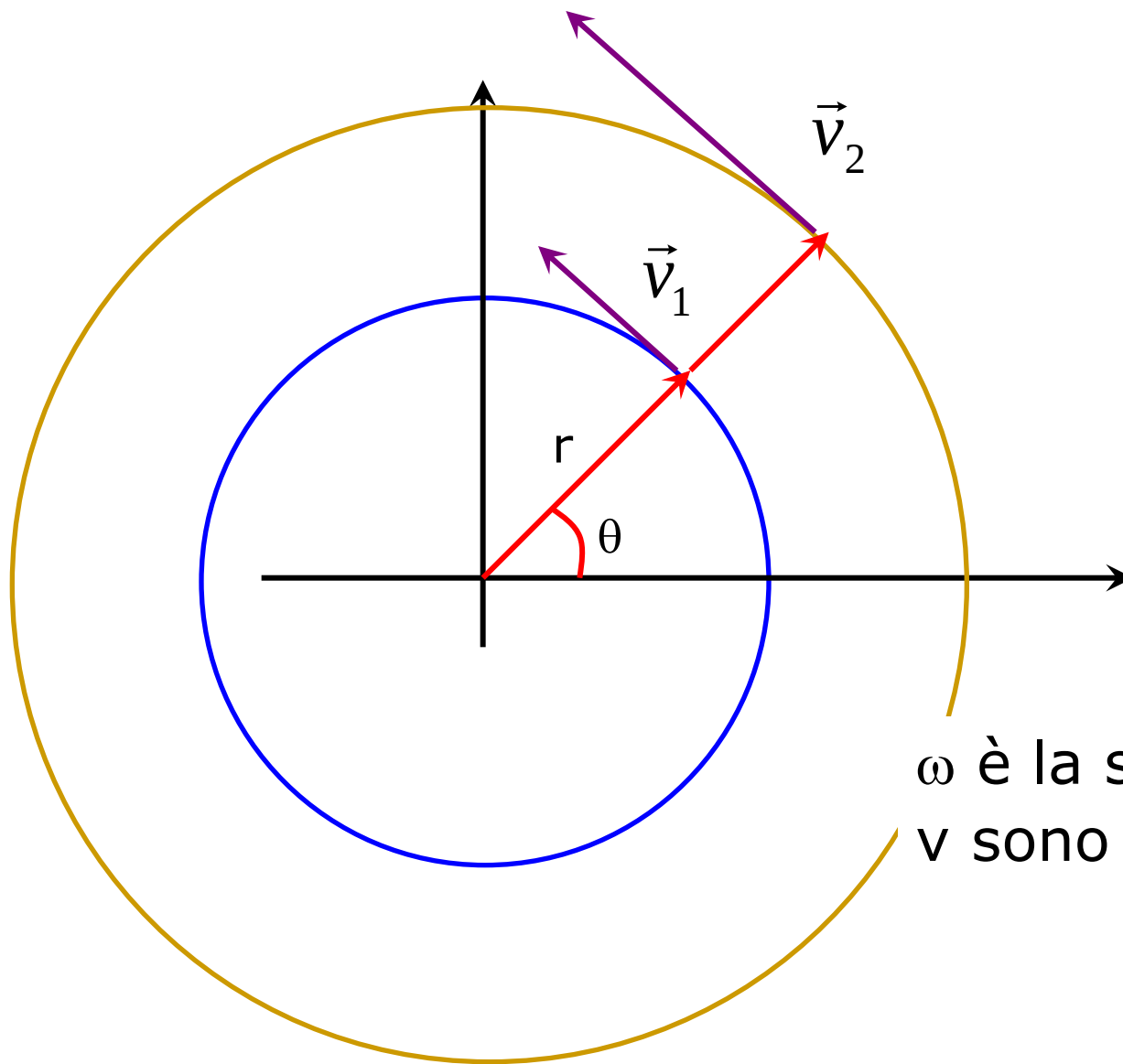
La velocità come sappiamo è tangente al cerchio.

Il suo modulo vale

$$\frac{ds}{dt} = \frac{rd\theta}{dt} = r\omega$$

Dato che la velocità è costante in modulo avremmo ottenuto lo stesso risultato da

$$v = \frac{\text{circonferenza}}{\text{periodo}} = \frac{2\pi r}{T} = r\omega$$



ω è la stessa ma le v sono diverse

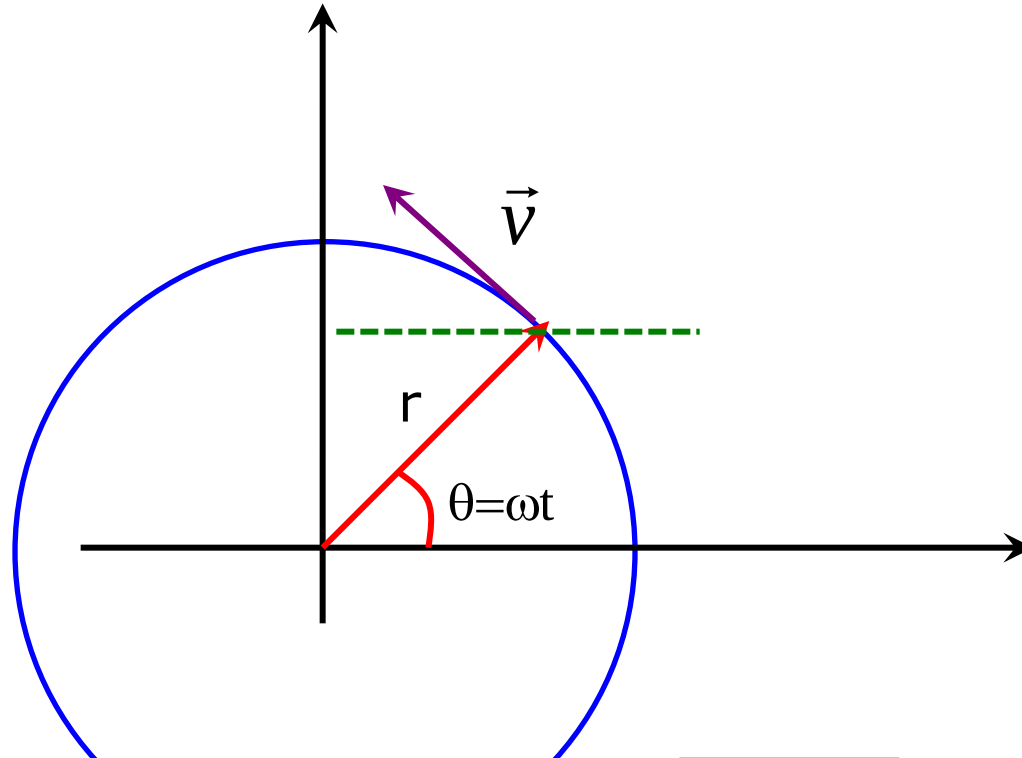
Verifichiamo che possiamo arrivare allo stesso risultato

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}\boldsymbol{\omega}$$

derivando le due componenti della legge oraria

e dimostrando allo stesso tempo che la velocità è tangente al cerchio

Moto circolare uniforme



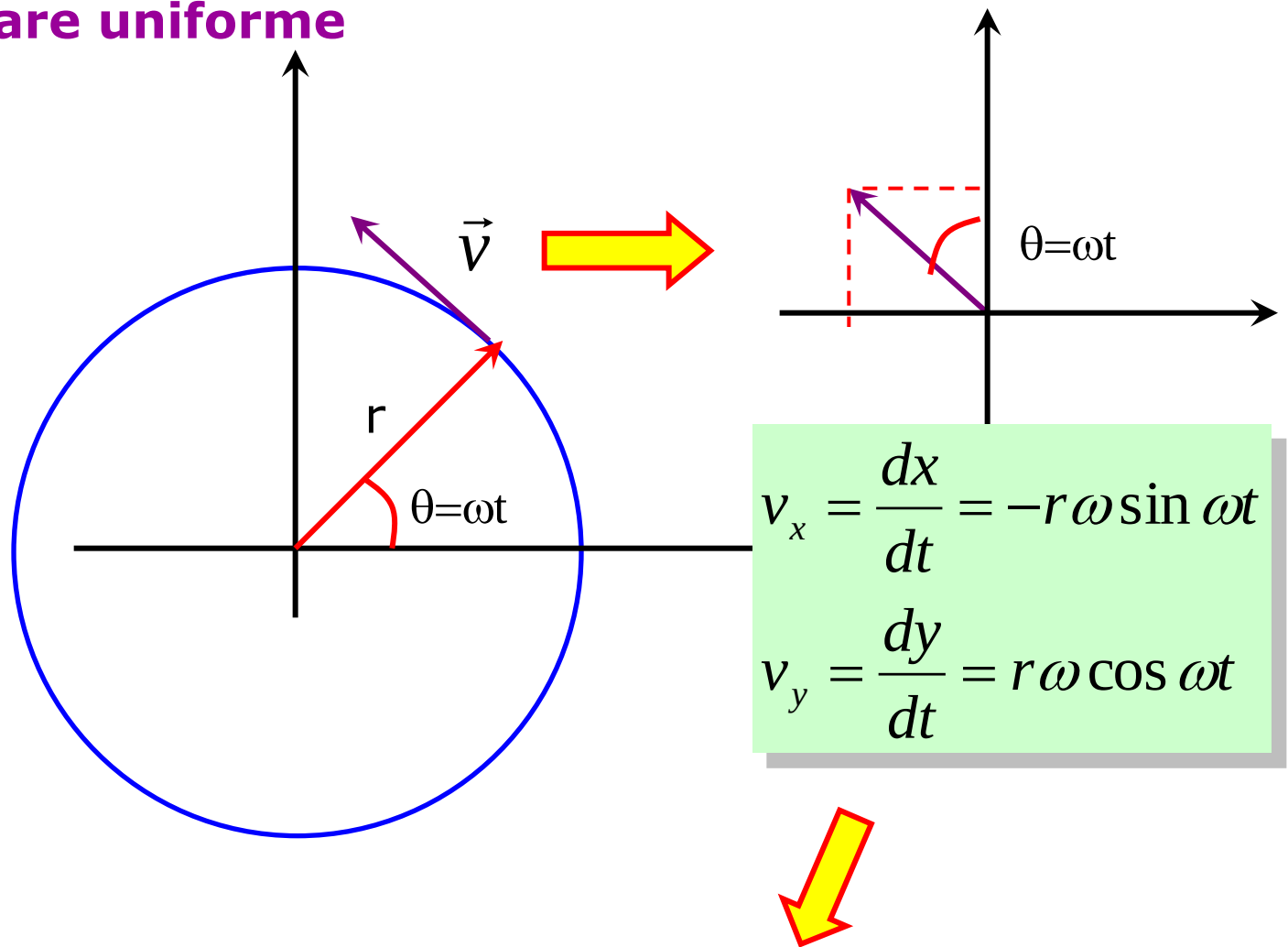
$$v_x = \frac{dx}{dt} = -r\omega \sin \omega t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = r\omega \cos \omega t$$

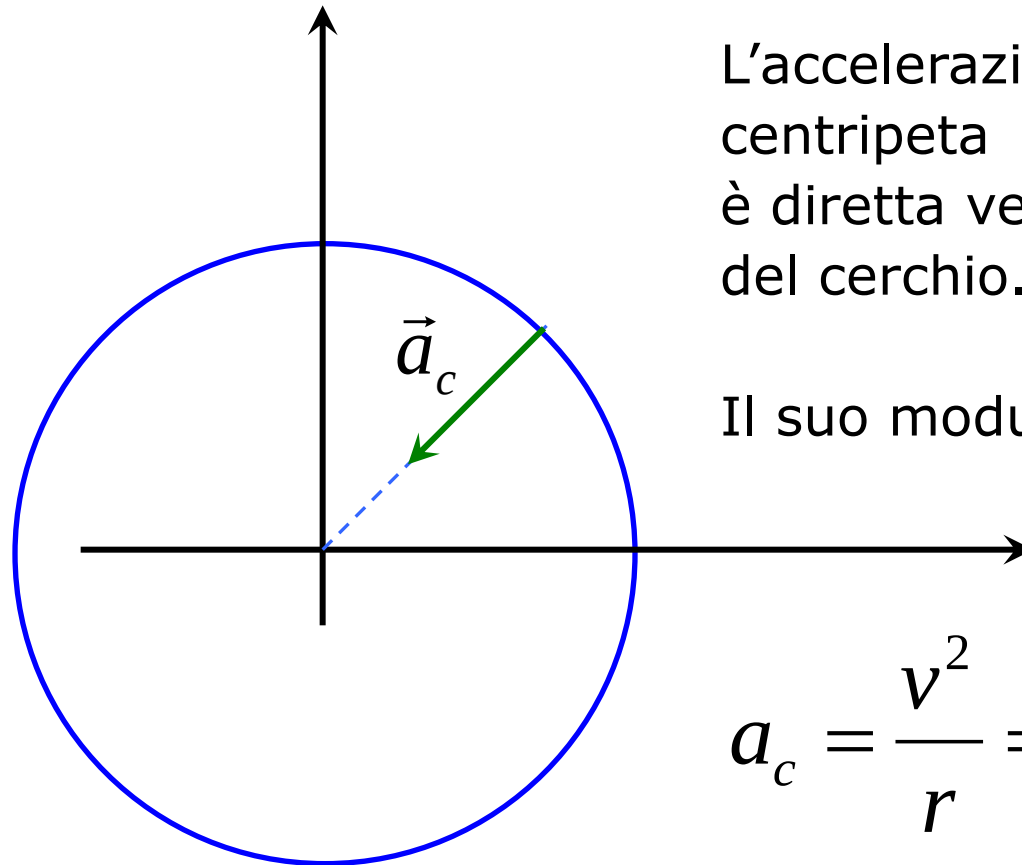
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\omega^2 r^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)}$$
$$v = \omega r$$

Moto circolare uniforme



Un vettore con queste componenti è tangente al cerchio come dev'essere la velocità



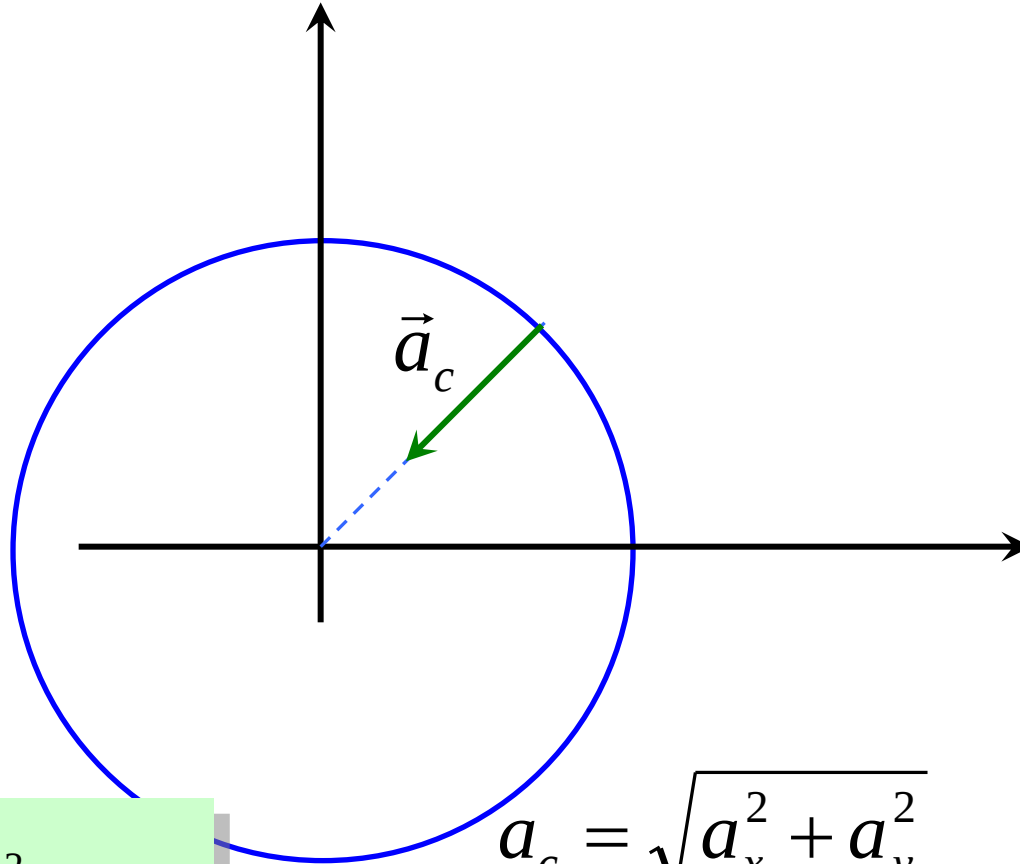
L'accelerazione centripeta è diretta verso il centro del cerchio.

Il suo modulo vale

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

Verifichiamo che otteniamo lo stesso risultato derivando la legge oraria

Moto circolare uniforme



$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -r\omega^2 \cos \omega t$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -r\omega^2 \sin \omega t$$

$$a_c = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$\Rightarrow a_c = \sqrt{\omega^4 r^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)}$$

$$a_c = \omega^2 r$$

Conclusione

Abbiamo esaminato un caso particolare molto importante di moto su traiettoria curva.

Abbiamo verificato direttamente che

- la velocità è tangente alla traiettoria
- l'accelerazione è diretta verso il centro di curvatura

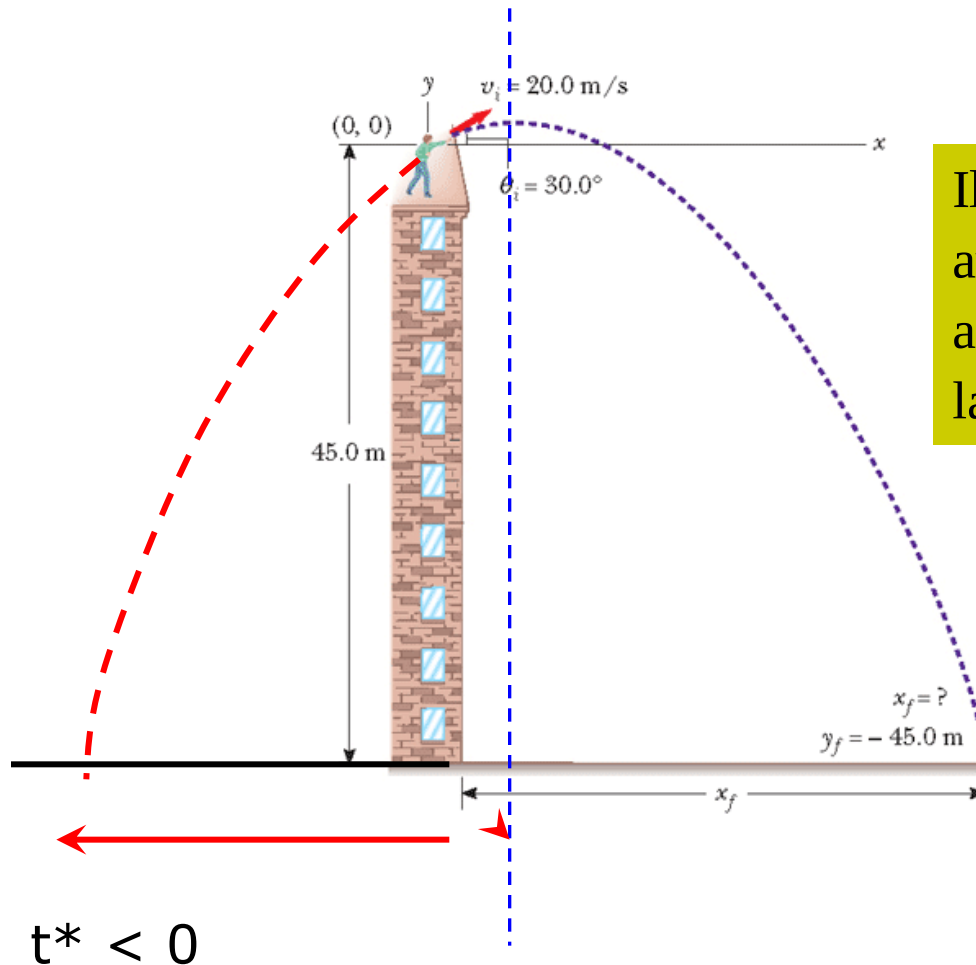
Questi risultati rimangono validi per qualunque moto ma teniamo presente che in genere la traiettoria non sarà un cerchio (R sarà variabile da punto a punto)

Il caso limite è il moto rettilineo in cui $R=\infty$ per cui $a_c = 0$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Periodo	T	$= 2\pi/\omega$
Pulsazione	ω	$= 2\pi/T$
Velocità	v	$= \omega R$
Accelerazione centripeta	a	$= \omega^2 R$ $= v^2/R$

Appendice



Il lanciatore fantasma avrebbe dovuto piazzarsi a x' per raggiungere il lanciatore vero a $t=0$

$$x' = -2,17 \times v_{0x} = -37,5 \text{ m}$$

